

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΚΑΙ ΝΕΟΛΑΙΑΣ
ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΑΝΩΤΕΡΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

ΠΑΓΚΥΠΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΠΡΟΣΒΑΣΗΣ 2024

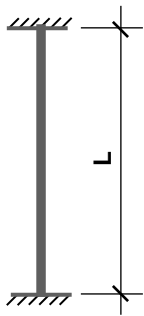
ΜΑΘΗΜΑ : ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΚΑΙ ΚΑΤΑΣΚΕΥΕΣ (400)
ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ : ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ, 14 ΙΟΥΝΙΟΥ 2024
ΩΡΑ : 8:00 – 10:30

ΛΥΣΕΙΣ

ΜΕΡΟΣ Α΄: Αποτελείται από δώδεκα (12) ασκήσεις.

Κάθε άσκηση βαθμολογείται με τέσσερις (4) μονάδες. Σύνολο σαράντα οκτώ (48) μονάδες.

1. Υποστύλωμα από σκυρόδεμα ύψους $L = 3,6\text{m}$ που στηρίζεται όπως στο **Σχήμα 1**, έχει ορθογωνική διατομή $25 \times 50\text{cm}$. Αν το μέτρο ελαστικότητας είναι $E = 31\text{kN/mm}^2$ να υπολογίσετε το μέγιστο (κρίσιμο) φορτίο που μπορεί να μεταφέρει χωρίς να εκδηλώνεται σε αυτό λυγισμός.



ΣΧΗΜΑ 1

$$\text{Ελεύθερο μήκος λυγισμού } \ell = 0,5 \cdot L = 0,5 \cdot 3,6 = 1,8\text{m} = 180\text{cm} = 1800\text{mm}$$

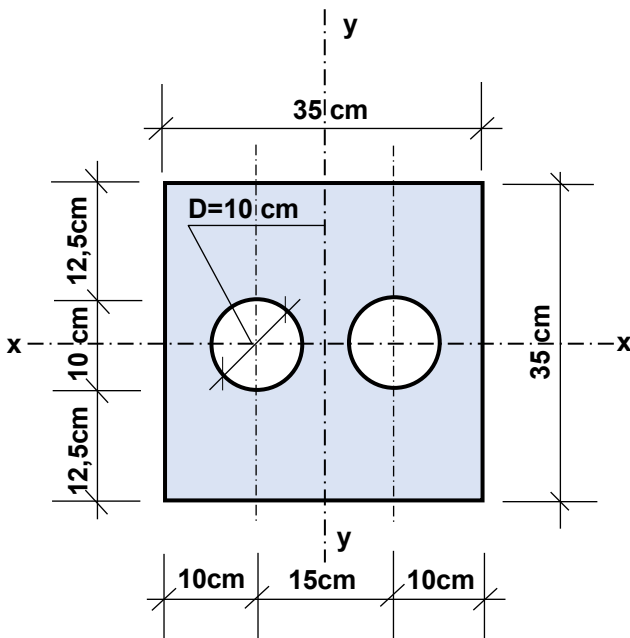
$$I_{\varepsilon\lambda} = \frac{b \cdot h^3}{12} \Rightarrow$$

$$I_{\varepsilon\lambda} = \frac{50 \cdot 25^3}{12} = 65104\text{cm}^4 = 651040000\text{mm}^4$$

$$F_{\text{κρίσ.}} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{\varepsilon\lambda}}{\ell^2} \Rightarrow$$

$$F_{\text{κρίσ.}} = \frac{\pi^2 \cdot 31 \cdot 651040000}{1800^2} = 61478,8\text{kN}$$

2. Να υπολογίσετε την ροπή αντίστασης W_x ως προς τον κεντροβαρικό άξονα $x - x$, της σύνθετης συμμετρικής διατομής που φαίνεται στο **Σχήμα 2**.



ΣΧΗΜΑ 2

Ροπή αδράνειας σύνθετης διατομής

$$I_x = \frac{b \cdot h^3}{12} - 2 \cdot \frac{\pi \cdot D^4}{64} \Rightarrow$$

$$I_x = \frac{35 \cdot 35^3}{12} - 2 \cdot \frac{\pi \cdot 10^4}{64} = 125052 - 2 \cdot 491 \Rightarrow$$

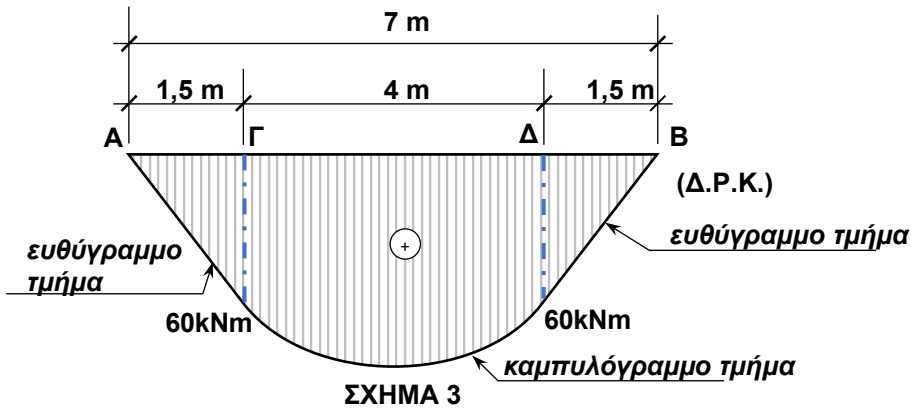
$$I_x = 124070 \text{ cm}^4$$

Ροπή αντίστασης

$$W_x = \frac{I_x}{y} \Rightarrow$$

$$W_x = \frac{124070}{17,5} = 7090 \text{ cm}^3$$

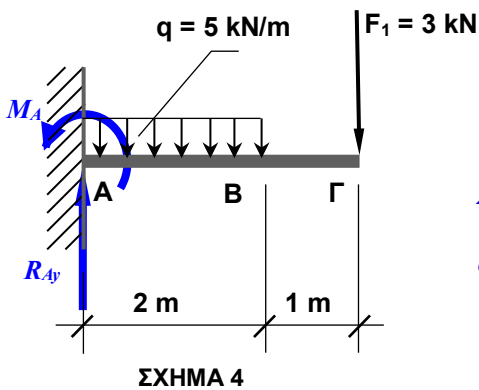
3. Στο **Σχήμα 3** δίνεται το διάγραμμα ροπών κάμψης **M (Δ.Ρ.Κ.)** αμφιέριστης δοκού AB με χαρακτηριστικά σημεία **A, B, Γ** και **Δ**, η οποία φορτίζεται συμμετρικά.
 α) Να ορίσετε την περιοχή της δοκού που υπάρχει **ομοιόμορφα κατανομημένο φορτίο q**.
 β) Να υπολογίσετε την αντίδραση **R_A** της δοκού αν ξέρετε ότι **M_Γ = 60kNm**.



α) περιοχή της δοκού που υπάρχει ομοιόμορφα κατανομημένο φορτίο q: ΑΠΟ Γ μέχρι Δ.

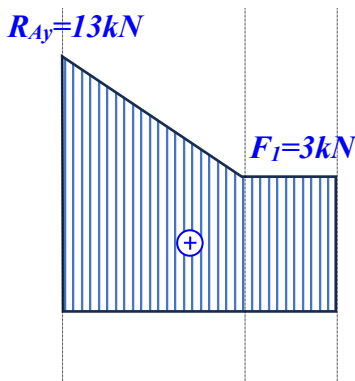
β) αντίδραση R_A : $M_{\Gamma} = R_A \cdot 1,5 \Rightarrow R_A = \frac{60\text{kNm}}{1,5\text{m}} = \underline{40\text{kN}}$

4. Δίνεται δοκός πρόβολος που φορτίζεται όπως φαίνεται στο **Σχήμα 4**.
 α) Να υπολογίσετε την αντίδραση **R_A** που αναπτύσσεται στη στήριξη της δοκού.
 β) Να σχεδιάσετε το διάγραμμα των τεμνουσών δυνάμεων **Q (Δ.Τ.Δ.)**.

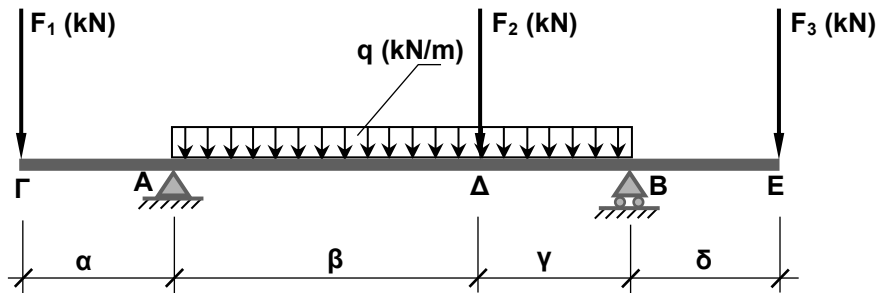


$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow$$

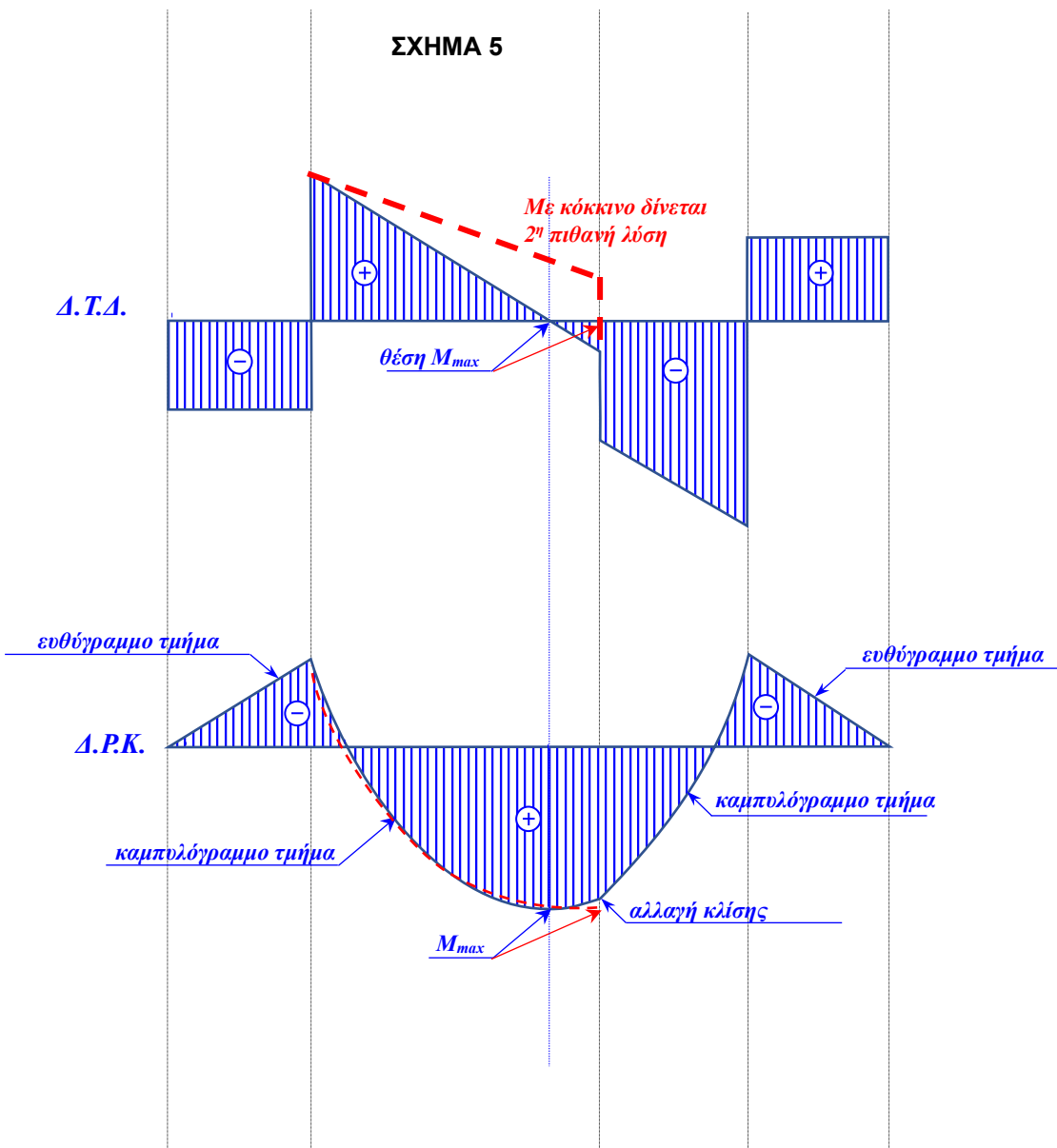
$$\alpha) R_{Ay} = 5 \cdot 2 + 3 \Rightarrow R_{Ay} = \underline{13\text{ kN}}$$



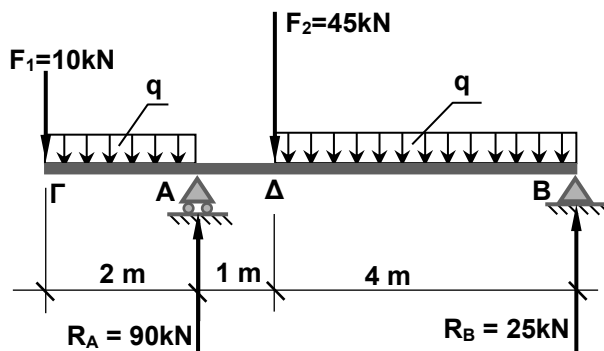
5. Για την πιο κάτω δοκό του **Σχήματος 5** να σχεδιάσετε το διάγραμμα των τεμνουσών δυνάμεων **Q (Δ.Τ.Δ.)** και το διάγραμμα των ροπών κάμψης **M (Δ.Ρ.Κ.)**, χωρίς υπολογισμούς. Στο διάγραμμα των ροπών κάμψης να σημειώσετε τα ευθύγραμμα και τα καμπυλόγραμμα τμήματα.



ΣΧΗΜΑ 5



6. Προέχουσα δοκός φορτίζεται όπως στο **Σχήμα 6** στο οποίο φαίνονται και οι αντιδράσεις στις στηρίξεις. Να υπολογίσετε το μέγεθος του ομοιόμορφα κατανομμένου φορτίου q (kN/m) που καταπονεί την δοκό.



ΣΧΗΜΑ 6

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow$$

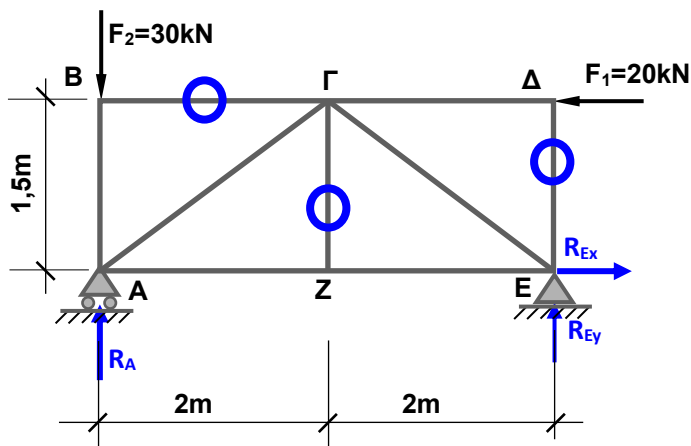
$$R_A + R_B - F_1 - F_2 - q \cdot (2+4) = 0 \Rightarrow$$

$$6q = 90 + 25 - 10 - 45 = 60 \Rightarrow$$

$$q = 10 \text{ kN/m}$$

7. Για το δίκτυωμα του **Σχήματος 7**:

- Να σχεδιάσετε τις αντιδράσεις στις στηρίξεις **A** και **E** και να υπολογίσετε **ΜΟΝΟ** την οριζόντια αντίδραση.
- Να κατονομάσετε τις **τρεις** ράβδους με **μηδενική** εσωτερική δύναμη.
- Να αναφέρετε το είδος καταπόνησης (εφελκυσμός ή θλίψη) των ράβδων **AB** και **ΓΔ**.



ΣΧΗΜΑ 7

α) Αντιδράσεις

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow R_{Ex} = F_1 = 20 \text{ kN}$$

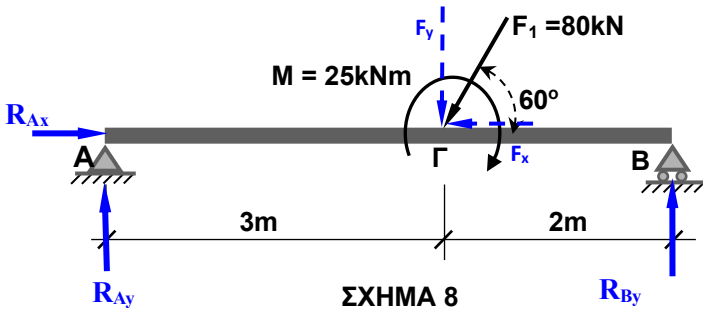
β) Ράβδοι με μηδενική καταπόνηση:
Ράβδος **BΓ**, **ΔΕ** και **ΓΖ**

γ) F_{AB} και $F_{ΓΔ}$ είναι θλιβόμενες

8. Για τη δοκό του **Σχήματος 8**:

α) Να σχεδιάσετε τις αντιδράσεις στις στηρίξεις.

β) Να γράψετε την εξίσωση ισορροπίας δυνάμεων στην **κατακόρυφη** κατεύθυνση ($\Sigma F_y=0$) σε συνάρτηση με τα δεδομένα που σας δίνονται.



ΣΧΗΜΑ 8

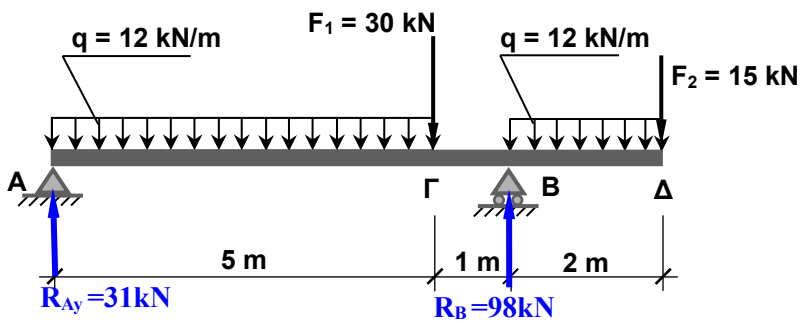
$$\beta) \Sigma F_y = 0 \Rightarrow$$

$$R_{Ay} + R_{By} - F_{1y} = 0 \Rightarrow$$

$$R_{Ay} + R_{By} - F_1 \cdot \eta\mu 60^\circ = 0 \Rightarrow$$

$$R_{Ay} + R_{By} - 80 \cdot \eta\mu 60^\circ = 0$$

9. Σε προέχουσα δοκό που φορτίζεται όπως στο **Σχήμα 9**, οι αντιδράσεις είναι $R_A = 31\text{kN}$ και $R_B = 98\text{kN}$. Να υπολογίσετε την απόσταση x από το σημείο **A** όπου έχω την μεγαλύτερη ροπή κάμψης M_{\max} .



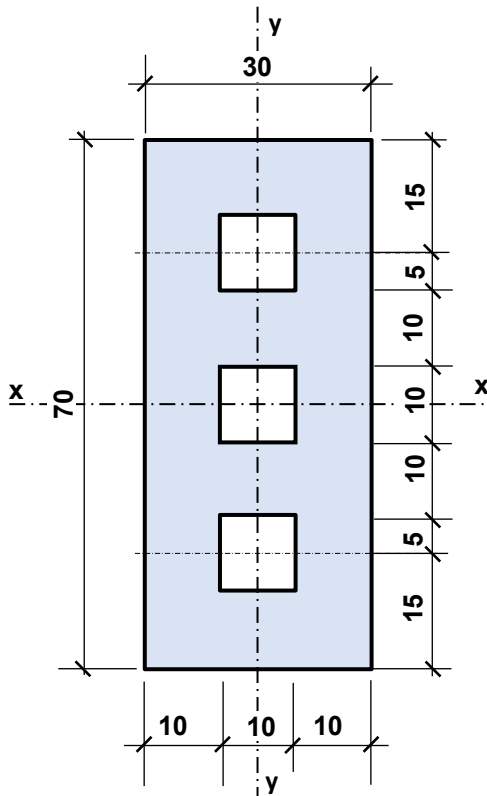
ΣΧΗΜΑ 9

Θέση μέγιστης ροπής κάμψης M_{\max} .

$$Q(x) = 0 \Rightarrow R_A - q \cdot x = 0$$

$$31 - 12 \cdot x = 0 \Rightarrow x = \frac{31}{12} \Rightarrow x = 2,583\text{m}$$

10. Να υπολογίσετε τη ροπή αδράνειας ως προς τον κεντροβαρικό άξονα $x - x$, της σύνθετης διατομής του Σχήματος 10. Οι διαστάσεις της διατομής είναι σε cm.



ΣΧΗΜΑ 10

Ροπή αδράνειας σύνθετης διατομής

Για ορθογώνιο και για τετράγωνο ισχύει:

$$I_x = \frac{b \cdot h^3}{12}$$

Το κέντρο βάρους του πάνω και του κάτω τετράγωνου

απέχουν από τον άξονα X απόσταση $d_y = 5 + 10 + 5 \Rightarrow$

$d_y = 20\text{cm}$, άρα χρειάζονται Στάινερ που προσθέτει $A \cdot d_y^2$ στην παραπάνω ροπή αδράνειας. (A : εμβαδό τετραγώνου) \Rightarrow

$$I_x = 30 \cdot 70^3 / 12 - \quad (\text{ορθογώνιο } 30 \times 70)$$

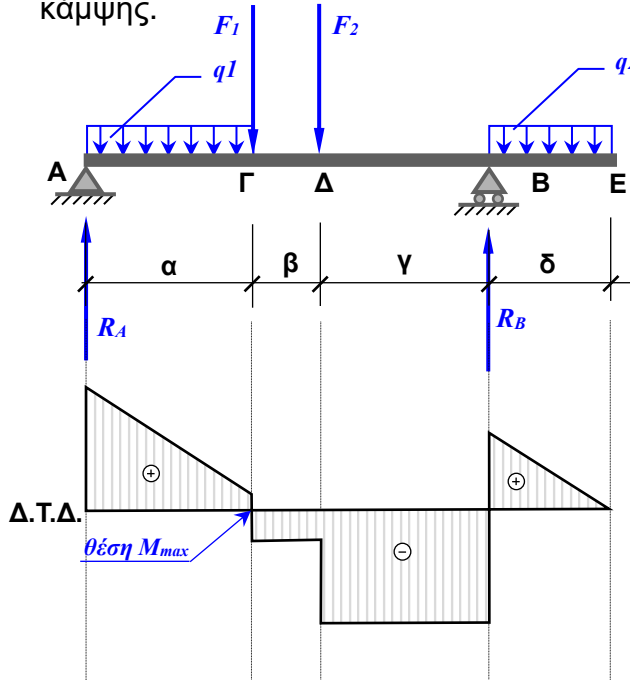
$$(10 \cdot 10^3 / 12) \cdot 3 - \quad (\text{τρία τετράγωνα } 10 \times 10)$$

$$2 \cdot (10^2) \cdot (5 + 5 + 10)^2 \quad (\text{Στάινερ, δύο Τετράγωνα } A \cdot d_y^2)$$

$$= 857500 - 3 \cdot 833,3 - 2 \cdot 40000 = 775000 \text{ cm}^4$$

11. Στο **Σχήμα 11** δίνονται προέχουσα δοκός και η σχηματική μορφή του διαγράμματος των τεμνουσών δυνάμεων (**Δ.Τ.Δ.**).

- α) Να σχεδιάσετε τις αντιδράσεις στις στηρίξεις και τα φορτία που καταπονούν τη δοκό, έτσι ώστε να ανταποκρίνονται στο (**Δ.Τ.Δ.**)
 β) Να σημειώσετε στο (**Δ.Τ.Δ.**) τη θέση που θα έχουμε τη μεγαλύτερη θετική ροπή κάμψης.

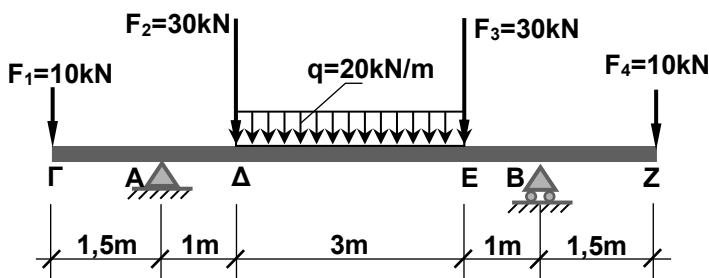


ΣΧΗΜΑ 11

β) Στο σημείο Γ θα έχουμε τη μεγαλύτερη θετική ροπή κάμψης επειδή εκεί αλλάζει πρόσημο η τέμνουσα.

12. Για την αμφιπροέχουσα δοκό που φορτίζεται συμμετρικά όπως στο **Σχήμα 12**, να υπολογίσετε:

- α) Τις αντιδράσεις στις στηρίξεις της δοκού.
 β) Την τέμνουσα δύναμη στα αριστερά του σημείου E (Q_E^{ap}).



ΣΧΗΜΑ 12

α) Λόγω συμμετρίας $R_A = R_B$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow R_A + R_B - 10 - 30 - 20 \cdot 3 - 30 - 10 = 0 \Rightarrow$$

$$R_A + R_B = 140 \Rightarrow R_A = R_B = 140/2 = 70\text{kN}$$

$$\beta) Q_E^{ap} = -10 + 70 - 30 - 20 \cdot 3 = \underline{\underline{-30\text{kN}}}$$

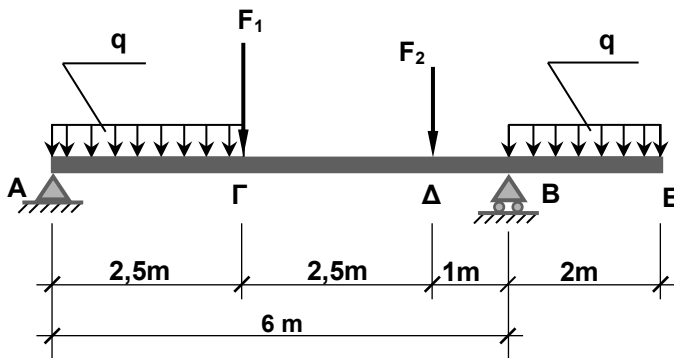
ΤΕΛΟΣ ΜΕΡΟΥΣ Α΄
 ΑΚΟΛΟΥΘΕΙ ΤΟ ΜΕΡΟΣ Β΄

ΜΕΡΟΣ Β΄: Αποτελείται από τέσσερις (4) ασκήσεις.

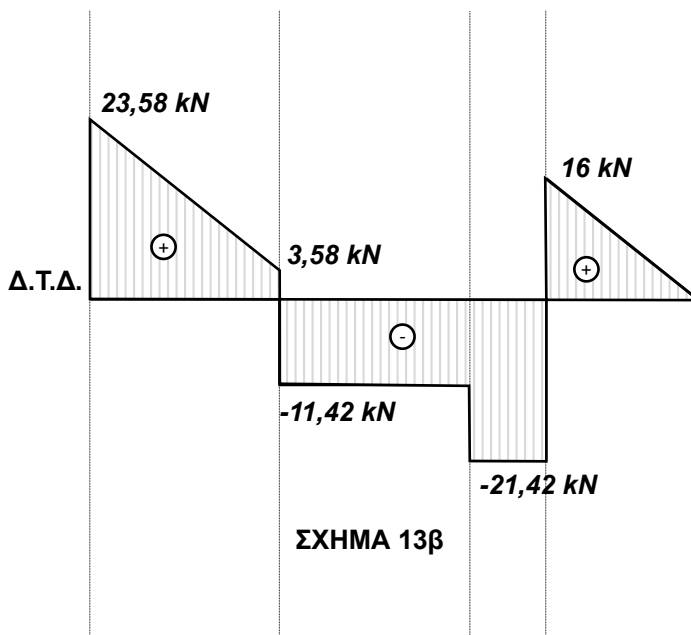
Κάθε άσκηση βαθμολογείται με οκτώ (8) μονάδες. Σύνολο τριάντα δύο (32) μονάδες.

13. Προέχουσα δοκός φορτίζεται όπως φαίνεται στο **Σχήμα 13α**. Στο **Σχήμα 13β** δίνεται το διάγραμμα των τεμνουσών δυνάμεων (**Δ.Τ.Δ.**) της δοκού. Να υπολογίσετε:

- α) Τις αντιδράσεις στις στηρίξεις **A** και **B**.
- β) Την τιμή του ομοιόμορφα κατανεμημένου φορτίου **q(kN/m)**.
- γ) Το μέγεθος της μέγιστης θετικής ροπής κάμψης **M_{max}**.



ΣΧΗΜΑ 13α



ΣΧΗΜΑ 13β

Από το Δ.Τ.Δ. βρίσκω:

α) Αντιδράσεις από τη διαφορά Q στα σημεία A και B

$$R_A = 23,58 \text{ kN}$$

$$R_B = 16 - (-21,42) = 37,42 \text{ kN}$$

β) Ομοιόμορφο φορτίο από την κλίση το διαγράμματος στο ΑΓ ή ΒΕ

$$q = \frac{23,58 - 3,58}{2,5} = 8 \frac{\text{kN}}{\text{m}} \text{ από ΑΓ}$$

$$q = \frac{16 - 0}{2} = 8 \frac{\text{kN}}{\text{m}} \text{ από ΒΕ}$$

γ) Εύρεση **M_{max}** είτε από το εμβαδό του ΔΤΔ από A μέχρι Γ ή από την ροπή των αριστερά φορτίων.

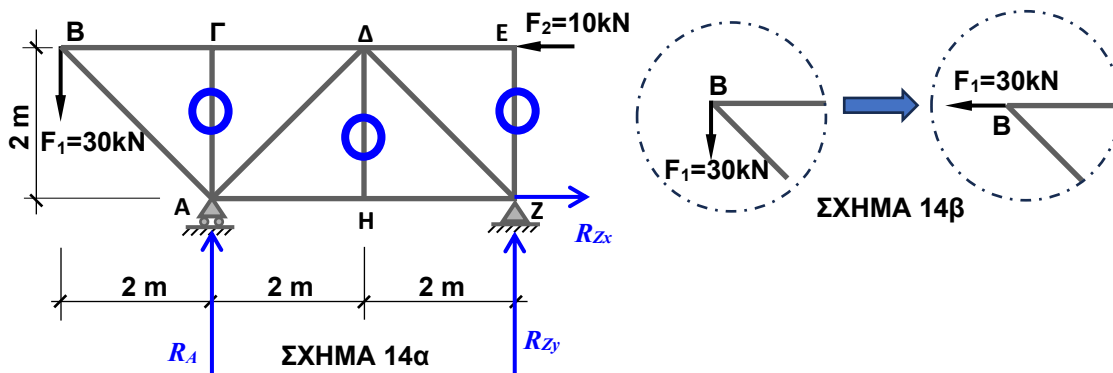
$$M_{max} = 2,5 \cdot \frac{23,58 + 3,58}{2} = 33,95 \text{ kNm από εμβαδό}$$

$$M_{max} = 2,5 \cdot R_A - q \cdot \frac{2,5^2}{2} = 2,5 \cdot 23,58 - 8 \cdot \frac{2,5^2}{2}$$

$$M_{max} = 33,95 \text{ kNm από ροπή αριστερά δυνάμεων}$$

14. Δίνεται δικτύωμα με γεωμετρία και φορτία όπως φαίνονται στο **Σχήμα 14α**.

- Να υπολογίσετε τις αντιδράσεις στις στηρίξεις **A** και **Z** του δικτυώματος.
- Να εντοπίσετε τις **τρεις (3)** ράβδους που έχουν μηδενική εσωτερική δύναμη.
- Να υπολογίσετε το μέγεθος της εσωτερικής δύναμης και να καθορίσετε το είδος καταπόνησης που αναπτύσσεται στις ράβδους **ΓΔ**, **ΑΔ** και **ΑΗ** του δικτυώματος με τη **μέθοδο των ΤΟΜΩΝ**.
- Αν η δύναμη F_1 που ασκείται στον κόμβο **B**, περιστραφεί δεξιόστροφα κατά 90° ώστε να γίνει ομόρροπη με την F_2 , όπως φαίνεται στο **σχήμα 14β**, να αναφέρετε τι επίπτωση θα έχει στην αντίδραση R_{Zx} .



a) Υπολογισμός αντιδράσεων R_{Zx} , R_{Zy} και R_A

$$\Sigma F_x = 0 \rightarrow R_{Zx} = F_2 = \underline{10 \text{ kN}}$$

$$\overset{+}{\curvearrowright} \Sigma M_A = 0$$

$$F_1 \cdot 2 + F_2 \cdot 2 + R_{Zy} \cdot 4 = 0$$

$$30 \cdot 2 + 10 \cdot 2 + R_{Zy} \cdot 4 = 0$$

$$60 + 20 + 4R_{Zy} = 0$$

$$R_{Zy} = \underline{-20 \text{ kN}}$$

$$\overset{+}{\curvearrowright} \Sigma M_Z = 0$$

$$- R_A \cdot 4 + F_1 \cdot 6 + F_2 \cdot 2 = 0$$

$$4R_A = 30 \cdot 6 + 10 \cdot 2 = 0$$

$$4R_A = 180 + 20 = 0$$

$$R_A = \underline{50 \text{ kN}}$$

Έλεγχος:

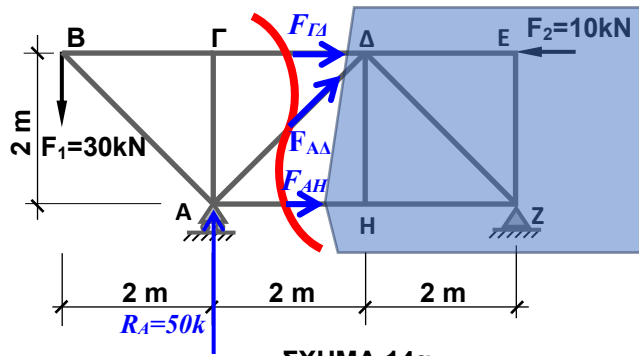
$$\Sigma F_y = 0$$

$$R_{Ay} + R_{Zy} - F_1 = 0$$

$$50 - 20 - 30 = 0 \checkmark$$

β) Οι ράβδους με μηδενική εσωτερική δύναμη είναι οι ΑΓ, ΔΗ και ΕΖ

γ) Επίλυση με την μέθοδο των ΤΟΜΩΝ (Τέμνω τις ράβδους ΓΔ, ΑΔ και ΑΗ του δικτυώματος)



ΣΧΗΜΑ 14α

Ροπές ως προς το Α ($\Sigma M_A = 0$) 

$$F_1 \cdot 2 - F_{\Gamma\Delta} \cdot 2 = 0 \Rightarrow F_{\Gamma\Delta} = F_1 = \underline{30\text{kN εφελκόμενη}}$$

Ροπές ως προς το Δ ($\Sigma M_\Delta = 0$)

$$F_1 \cdot 4 + F_{ΑΗ} \cdot 2 - R_A \cdot 2 = 0 \Rightarrow F_{ΑΗ} = -2F_1 + R_A = \underline{-10\text{kN θλιβόμενη}}$$

Ροπές ως προς το Β ($\Sigma M_B = 0$) έχω $AB = 2\sqrt{2}$ κάθετη στην ΑΔ

$$F_{ΑΔ} \cdot 2\sqrt{2} + F_{ΑΗ} \cdot 2 + R_A \cdot 2 = 0 \Rightarrow \sqrt{2}F_{ΑΔ} = -F_{ΑΗ} - R_A = -(-10) - 50 = -40$$

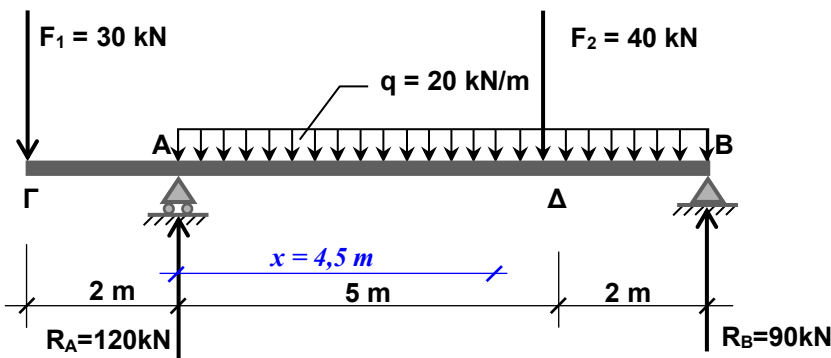
$$F_{ΑΔ} = \underline{-28,27\text{kN θλιβόμενη}}$$

δ) Η αντίδραση R_{z_x} θα γίνει 40 kN (θα αυξηθεί)

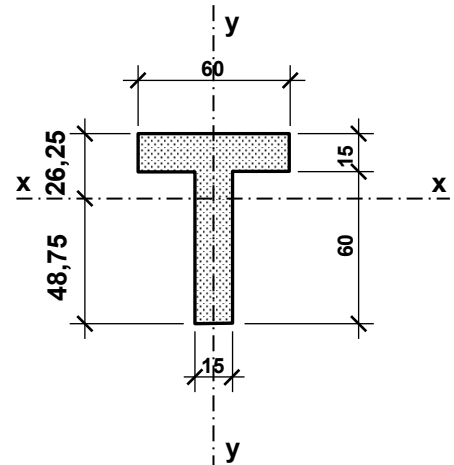
15. Δίνεται προέχουσα δοκός που φορτίζεται όπως φαίνεται στο **Σχήμα 15α**. Η δοκός έχει διατομή **T** όπως φαίνεται στο **Σχήμα 15β**. Να υπολογίσετε:
- Τη μέγιστη θετική και τη μέγιστη αρνητική ροπή κάμψης.
 - Τις μέγιστες τάσεις **θλίψης** και **εφελκυσμού** σε **N/mm²** που θα αναπτυχθούν τόσο στη θέση της **μέγιστης θετικής** όσο και στη θέση της **μέγιστης αρνητικής** ροπής κάμψης.

Δίνεται η Ροπή Αδράνειας $I_x = 919800 \text{ cm}^4$.

Οι διαστάσεις της διατομής είναι σε cm.



ΣΧΗΜΑ 15α



ΣΧΗΜΑ 15β

Θέση μέγιστης θετικής ροπής κάμψης

$$Q_x = 0 \Rightarrow -F_1 + R_A - q \cdot x = 0 \Rightarrow -30 + 120 - 20 \cdot x = 0 \Rightarrow 20x = 90 \Rightarrow x = \underline{4,5 \text{ m}}$$

Μέγιστη θετική ροπή κάμψης

$$M_{max} = -30 \cdot (2+4,5) + 120 \cdot 4,5 - 20 \cdot 4,5 \cdot 2,25 = \underline{142,5 \text{ kNm}}$$

Μέγιστη αρνητική ροπή κάμψης στη στήριξη A

$$M_A = -30 \cdot 2 = -60 = \underline{-60 \text{ kNm}}$$

Μέγιστες τάσεις θλίψης και εφελκυσμού στη θέση Mmax και B

Μέγιστη τάση θλίψης (-) στην θέση $M_{max} = 142,5 \text{ kNm}$ (άνω)

$$\sigma_{μεγ.(-)} = \frac{142,5 \cdot 10^6 \text{ Nmm} \cdot 262,5 \text{ mm}}{919800 \cdot 10^4 \text{ mm}^4} = \underline{4,06 \text{ N/mm}^2}$$

Μέγιστη τάση εφελκυσμού (+) στην θέση $M_{max} = 142,5 \text{ kNm}$ (κάτω)

$$\sigma_{μεγ.(+)} = \frac{142,5 \cdot 10^6 \text{ Nmm} \cdot 487,5 \text{ mm}}{919687,5 \cdot 10^4 \text{ mm}^4} = \underline{7,54 \text{ N/mm}^2}$$

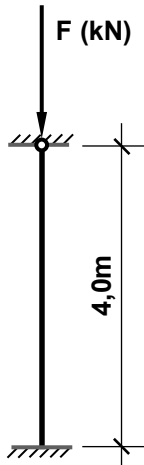
Μέγιστη τάση θλίψης (-) στην θέση $M_B = 60 \text{ kNm}$ (κάτω)

$$\sigma_{μεγ.(-)} = \frac{60 \cdot 10^6 \text{ Nmm} \cdot 487,5 \text{ mm}}{919687,5 \cdot 10^4 \text{ mm}^4} = \underline{3,18 \text{ N/mm}^2}$$

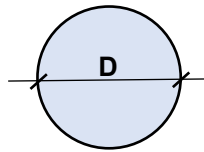
Μέγιστη τάση εφελκυσμού (+) στην θέση $M_B = 60 \text{ kNm}$ (άνω)

$$\sigma_{μεγ.(+)} = \frac{60 \cdot 10^6 \text{ Nmm} \cdot 262,5 \text{ mm}}{919687,5 \cdot 10^4 \text{ mm}^4} = \underline{1,71 \text{ N/mm}^2}$$

16. Να υπολογίσετε τη διάμετρο **D** της κυκλικής διατομής ενός υποστυλώματος που στηρίζεται όπως στο **Σχήμα 16**, με πραγματικό μήκος **L = 4,0m**, το οποίο μεταφέρει με ασφάλεια αξονικό φορτίο **F_{επ} = 1800 kN** (**Σχήμα 16α** και **Σχήμα 16β**).
 Μέτρο ελαστικότητας: **E = 210 kN/mm²**
 Συντελεστής ασφάλειας: **γ = 2,5**



ΣΧΗΜΑ 16α



ΣΧΗΜΑ 16β

Ελεύθερο μήκος λογισμού για μονόπακτο (συντελεστής λογισμού = 0,7)

$$\ell = 0,7 L = 0,7 \cdot 4\text{m} = 2800 \text{ mm}, \quad F_{\text{επ.}} = \frac{F_{\text{κρ.}}}{\gamma}, \quad F_{\text{κρίσ.}} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{\text{ελ.}}}{\ell^2}, \quad I_{\text{ελ.}} = \frac{\pi \cdot D^4}{64}$$

$$F_{\text{κρίσ.}} = 1800 \cdot 2,5 = 4500 \text{ kN}$$

$$F_{\text{κρίσ.}} = \frac{\pi^2 \cdot 210 \cdot I_{\text{ελ.}}}{2800^2} \Rightarrow I_{\text{ελ.}} = \frac{F_{\text{κρίσ.}} \cdot 2800^2}{\pi^2 \cdot 210} = \frac{4500 \cdot 2800^2}{\pi^2 \cdot 210} = \frac{3528000000}{2072,617} = 17021958,85 \text{ mm}^4$$

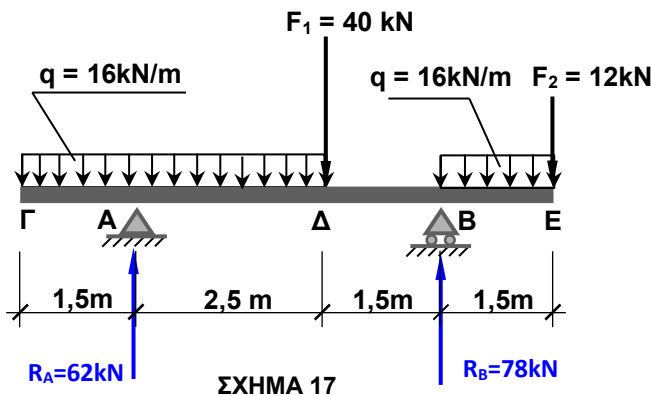
$$I_{\text{ελ.}} = \frac{\pi \cdot D^4}{64} \Rightarrow D^4 = \frac{64 \cdot I_{\text{ελ.}}}{\pi} = 346768498,2 \Rightarrow D = \sqrt[4]{346768498,2} = 136,5 \Rightarrow D = \boxed{136,5 \text{ mm}}$$

ΤΕΛΟΣ ΜΕΡΟΥΣ Β΄
 ΑΚΟΛΟΥΘΕΙ ΤΟ ΜΕΡΟΣ Γ΄

ΜΕΡΟΣ Γ': Αποτελείται από μία (1) ερώτηση
Η ερώτηση βαθμολογείται με είκοσι (20) μονάδες.

17. Αμφιπροέχουσα δοκός φορτίζεται όπως φαίνεται στο **Σχήμα 17**.

- Να υπολογίσετε τις αντιδράσεις στις στηρίξεις **A** και **B**.
- Να υπολογίσετε τις τέμνουσες δυνάμεις και τις ροπές κάμψης στα χαρακτηριστικά σημεία **A, B, Γ, Δ** και **E**.
- Να υπολογίσετε την απόσταση **x** από το σημείο στήριξης **A**, όπου αναπτύσσεται η μέγιστη θετική ροπή κάμψης **M_{max}**.
- Να υπολογίσετε το μέγεθος της μέγιστης θετικής ροπής κάμψης **M_{max}**.
- Να σχεδιάσετε τα διαγράμματα των τεμνουσών δυνάμεων **Q (Δ.Τ.Δ.)** και των ροπών κάμψης **M (Δ.Ρ.Κ.)** και να αναγράψετε τα μεγέθη τους στα χαρακτηριστικά σημεία **A, B, Γ, Δ και E**, καθώς και το μέγεθος της μέγιστης θετικής ροπής κάμψης **M_{max}**. Να σημειώσετε στο **Δ.Ρ.Κ.** τα ευθύγραμμα και καμπυλόγραμμα τμήματα του.



Υπολογισμός αντιδράσεων

$$\Sigma M_A = 0 \quad \curvearrowright +$$

$$-16 \cdot 4 \cdot 0,5 - 40 \cdot 2,5 - 16 \cdot 1,5 \cdot (4 + 0,75) + R_B \cdot 4 - 12 \cdot 5,5 = 0 \Rightarrow$$

$$4R_B = 32 + 100 + 114 + 66 \Rightarrow$$

$$4R_B = 312 \Rightarrow$$

$$R_B = \underline{78 \text{ kN}}$$

$$\Sigma M_B = 0 \quad \curvearrowright +$$

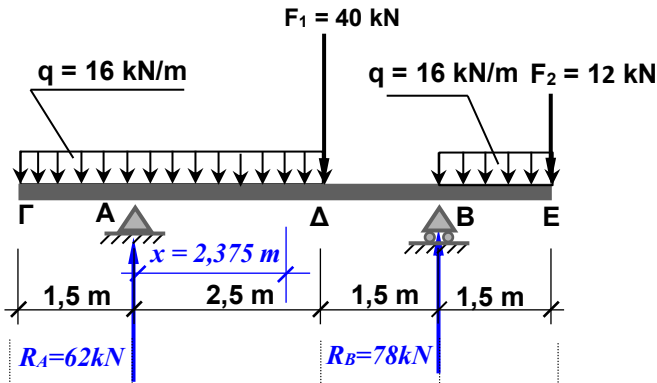
$$16 \cdot 4 \cdot (2 + 1,5) - R_A \cdot 4 + 40 \cdot 1,5 - 16 \cdot 1,5 \cdot 0,75 - 12 \cdot 1,5 = 0 \Rightarrow$$

$$4R_A = 224 + 60 - 18 - 18 \Rightarrow$$

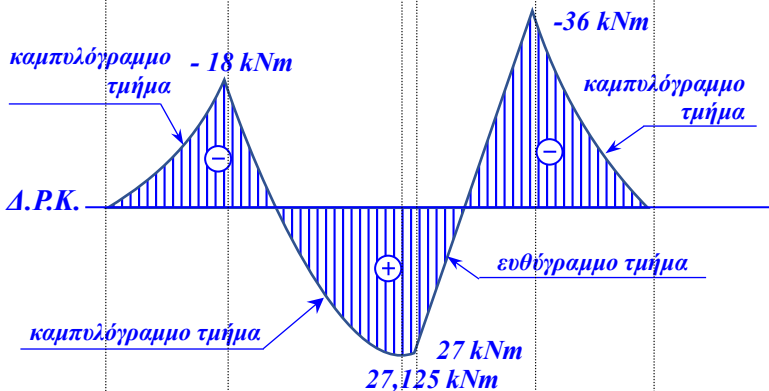
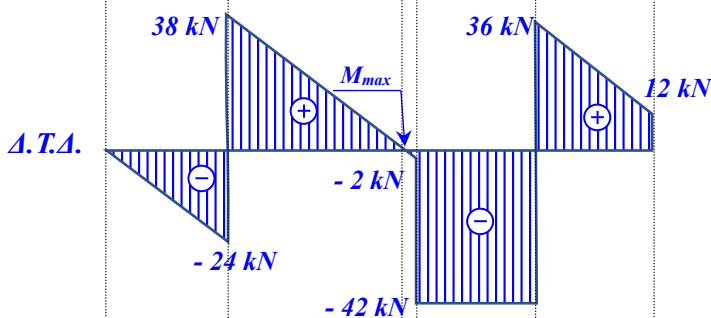
$$4R_A = 248 \Rightarrow$$

$$R_A = \underline{62 \text{ kN}}$$

$$\text{Έλεγχος } \Sigma F_y = 0 \Rightarrow (62 + 78) - 40 - 12 - 16 \cdot (1,5 + 2,5) - 16 \cdot 1,5 = 0 \Rightarrow 140 = 140 \quad \checkmark$$



ΣΧΗΜΑ 17



β) Τέμνουσες δυνάμεις

$Q_{\Gamma} = 0 \text{ kN}$

$Q_A^{ap.} = -16 \cdot 1,5 = -24 \text{ kN}$

$Q_A^{\delta\epsilon\zeta.} = -24 + 62 = 38 \text{ kN}$

$Q_{\Delta}^{ap.} = 38 - 16 \cdot 2,5 = -2 \text{ kN}$

$Q_{\Delta}^{\delta\epsilon\zeta.} = -2 - 40 = -42 \text{ kN}$

$Q_B^{ap.} = -42 \text{ kN}$

$Q_B^{\delta\epsilon\zeta.} = -42 + 78 = 36 \text{ kN}$

$Q_E^{ap.} = 36 - 16 \cdot 1,5 = 12 \text{ kN}$

$Q_E^{\delta\epsilon\zeta.} = 12 - 12 = 0 \text{ kN} \checkmark$

γ) Θέση μέγιστης θετικής ροπής κάμψης από A

$-16 \cdot 1,5 + 62 - 16 \cdot x = 0$

$16x = 38 \Rightarrow x = \frac{38}{16} \Rightarrow x = 2,375 \text{ m}$

ή θέση από Γ

$62 - 16 \cdot x = 0 \Rightarrow 16x = 62 \Rightarrow x = \frac{62}{16} \Rightarrow x = 3,875 \text{ m}$

β) Ροπές κάμψης

$M_{\Gamma} = 0 \text{ kNm}$

$M_A = -16 \cdot 1,5 \cdot 0,75 = -18 \text{ kNm}$

$M_{\Delta} = -16 \cdot 4 \cdot 2 + 62 \cdot 2,5 = -128 + 155 = 27 \text{ kNm}$

$M_B = -12 \cdot 1,5 - 16 \cdot 1,5 \cdot 0,75 = -36$

$M_E = -16 \cdot 4 \cdot 5 + 62 \cdot 5,5 - 40 \cdot 3 + 78 \cdot 1,5 - 16 \cdot 1,5 \cdot 0,75 = -320 + 341 - 120 + 117 - 18 = 0 \text{ kNm} \checkmark$

ή απ' ευθείας:

$M_E = 0 \text{ kNm}$

Μέγιστη θετική ροπή κάμψης

$M_{max.} = -16 \cdot 3,875^2/2 + 62 \cdot 2,375 = 27,12 \text{ kNm}$