ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ,
ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ ΚΑΙ ΝΕΟΛΑΙΑΣ
ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΑΝΩΤΕΡΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

ΓΡΑΠΤΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΓΙΑ ΕΓΓΡΑΦΗ ΚΑΙ ΚΑΤΑΤΑΞΗ ΣΤΟΥΣ ΠΙΝΑΚΕΣ ΔΙΟΡΙΣΙΜΩΝ 2023

Εξεταζόμενο Αντικείμενο (Κωδικός): ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (517)

Ημερομηνία και ώρα εξέτασης: 15 Νοεμβρίου 2023, 15:30 – 18:30

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Ερώτηση 1.

Δίνεται κυρτό τετράπλευρο $ΑΒΓΔ$. Σχηματίστε το τετράπλευρο με κορυφές τα μέσα $Ε$,$Ζ$,$Η$,$Θ$ των πλευρών του $ΑΒΓΔ$.

α) Να βρείτε τις αναγκαίες ιδιότητες του $ΑΒΓΔ$, ώστε το τετράπλευρο $ΕΖΗΘ$ να είναι:

i. Ορθογώνιο
ii. Ρόμβος
iii. Τετράγωνο

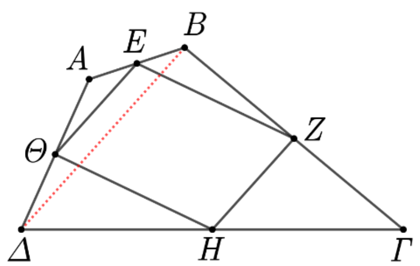
Για κάθε περίπτωση να αποδείξετε τον ισχυρισμό σας.

(μονάδες 8)

β) Ποια η διδακτική αξία του πιο πάνω προβλήματος;

(μονάδες 2)

Λύση

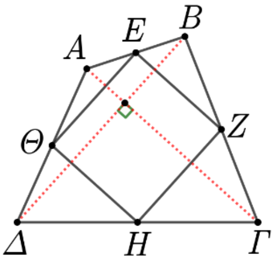


Σε κάθε περίπτωση το $ΕΖΗΘ$ είναι παραλληλόγραμμο αφού,

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}ΑΕ = ΒΕ\\ ΑΘ = ΘΔ\end{array}\right\} \Rightarrow ΘΕ \overset{\parallel}{=} \dfrac{ΒΔ}{2}\\ \left.\begin{array}{l}ΒΖ = ΖΓ\\ ΓΗ = ΗΔ\end{array}\right\} \Rightarrow ΖΗ \overset{\parallel}{=} \dfrac{ΒΔ}{2}\end{array}\right\} \Rightarrow ΘΕ \overset{\parallel}{=} ΖΗ \Rightarrow ΕΖΗΘ\#$$

α)

i. Για να είναι το $ΕΖΗΘ$ ορθογώνιο αρκεί να έχει μια ορθή γωνία. Προς τούτο αρκεί οι διαγώνιοι του ΑΒΓΔ να τέμνονται κάθετα.

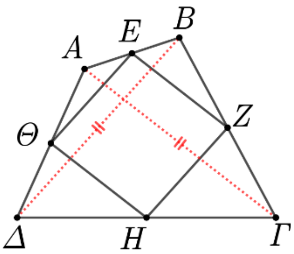


Απόδειξη: Έστω ότι $ΑΓ \perp ΒΔ$.

$ΘΕ \parallel ΒΔ$ όπως αποδείχθηκε στην αρχή.

Ομοίως προκύπτει $ΕΖ \parallel ΑΓ$. Επομένως, $Θ\hat{E}Ζ = 90°$ γιατί έχει τις πλευρές της παράλληλες σε δύο ευθύγραμμα τμήματα αντίστοιχα, κάθετα μεταξύ τους.

ii. Γνωρίζουμε ότι το $ΕΖΗΘ$ είναι παραλληλόγραμμο. Για να είναι ρόμβος αρκεί να έχει και δύο διαδοχικές πλευρές ίσες.

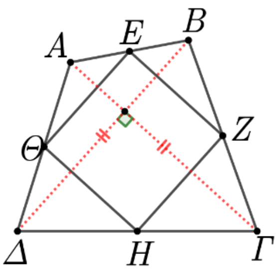


Προς τούτο, αρκεί οι διαγώνιοι του $ΑΒΓΔ$ να ισούνται.

Απόδειξη: Έστω $ΑΓ = ΒΔ$.

$ΘΕ = \frac{ΒΔ}{2}$ όπως αποδείχθηκε. Με όμοιο τρόπο παίρνουμε $ΕΖ = \frac{ΑΓ}{2}$. Επειδή $ΑΓ = ΒΔ$ προκύπτει $ΘΕ = ΕΖ$ και επομένως το $ΕΖΗΘ$ είναι ρόμβος

iii. Αν το $ΕΖΗΘ$ είναι ταυτόχρονα ορθογώνιο και ρόμβος τότε είναι τετράγωνο.



Προς τούτο, αρκεί οι διαγώνιοι του ΑΒΓΔ να ισούνται και να τέμνονται κάθετα.

Το συμπέρασμα προκύπτει από τα (i) και (ii).

β) Το πρόβλημα καλλιεργεί στους μαθητές τον αντίστροφο τρόπο σκέψης - συλλογισμού.

Ερώτηση 2.

α) Αν $A \triangle B \coloneqq (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ όπου A, B σύνολα, να αποδείξετε ότι,

$$A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

(μονάδες 4)

β) Ένα σύνολο $A \subset \mathbb{R}$ λέγεται ανοικτό αν για κάθε $x \in A$ υπάρχει ανοικτή περιοχή $\pi(x) \subset A$.

i. Να δείξετε ότι η άπειρη ένωση ανοικτών συνόλων είναι ανοικτό σύνολο.

ii. Να εξετάσετε αν η άπειρη τομή ανοικτών συνόλων είναι ανοικτό σύνολο.

(μονάδες 6)

Λύση

α) Έστω Ω ένα σύνολο αναφοράς των A και B. Αν $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$, τότε:

$$\begin{aligned} A \triangle B &= (A \cap B') \cup (B \cap A') \\ &= [(A \cap B') \cup B] \cap [(A \cap B') \cup A'] \\ &= [(A \cup B) \cap (B \cup B')] \cap [(A \cup A') \cap (B' \cup A')] \\ &= (A \cup B) \cap (B' \cup A') \\ &= (A \cup B) \cap (A \cap B)' \\ &= (A \cup B) \setminus (A \cap B) \end{aligned}$$

β)

i. Έστω ότι $\{A_i : i \in I\}$,όπου I απειροσύνολο δεικτών, είναι οικογένεια ανοικτών συνόλων και έστω

$$A = \bigcup_{i \in I} A_i$$

Αν $x \in A$ τυχαίο στοιχείο του A, τότε το $x \in A_k$ για $\kappa \in I$. Επειδή το σύνολο A_k είναι ανοικτό, υπάρχει μια ανοικτή περιοχή $\pi(x)$ έτσι ώστε $\pi(x) \subseteq A_\kappa$. Όμως τότε η ανοικτή περιοχή $\pi(x)$ θα ανήκει και στο σύνολο A. Επομένως το A είναι ανοικτό.

ii. Αντιπαράδειγμα.Έστω,

$$A = \bigcap_{\nu=1}^{\infty} P_\nu \quad \text{, με} \quad P_\nu = \left(-\frac{1}{\nu}, \frac{1}{\nu}\right) \quad \nu \in \mathbb{N}$$

Ισχύουν

$$P_{\nu+1} \subset P_\nu \Rightarrow P_{\nu+1} \cap P_\nu = P_{\nu+1} \text{ και } \lim_{\nu \to +\infty} \frac{1}{\nu} = 0$$

άρα

$$A = \bigcap_{\nu=1}^{\infty} P_\nu = \{0\}$$

το οποίο είναι δεν είναι ανοικτό σύμφωνα με τον ορισμό.

Ερώτηση 3.

α) Ζητήθηκε από μαθητές να βρουν το εμβαδόν E ορθογωνίου τρίγωνου $AB\Gamma$ με στοιχεία $\widehat{B} = 90^o$, $(A\Gamma) = 6$, $(B\Gamma) = 5$ και ύψος $(B\Delta) = 4$.

Η λύση ενός μαθητή περιλαμβάνει τα πιο κάτω:

$$(AB) = \sqrt{6^2 - 5^2} = \sqrt{11} \quad \text{και} \quad (B\Gamma)(AB) = (A\Gamma)(B\Delta) = 2E$$

Επομένως,

$$5\sqrt{11} = 6 \cdot 4 \Rightarrow \sqrt{11} = \frac{24}{5}$$

Να εξηγήσετε και να τεκμηριώσετε γιατί προέκυψε αυτό το λάθος.

(μονάδες 5)

β) Να βρείτε τα λάθη στον επόμενο ισχυρισμό, αιτιολογώντας πλήρως την απάντηση σας.

$$\begin{aligned}\lim_{x \to +\infty} \text{ημ}x &\overset{x=u+\pi}{=} \lim_{u \to +\infty} \text{ημ}(u+\pi) \\ &= \lim_{x \to +\infty} \text{ημ}(x+\pi) \\ &= \lim_{x \to +\infty} (-\text{ημ}x) \\ &= -\lim_{x \to +\infty} \text{ημ}x\end{aligned}$$

Επομένως,

$$2 \lim_{x \to +\infty} \text{ημ}x = 0 \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} \text{ημ}x = 0$$

(μονάδες 5)

Λύση

α) Το λάθος προκύπτει γιατί τα δεδομένα του προβλήματος είναι ασυμβίβαστα μεταξύ τους. Πιο συγκεκριμένα δεν
υπάρχει τρίγωνο με αυτά τα δεδομένα.
Αν θεωρήσουμε ότι τα δεδομένα είναι ορθά τότε από το ορθογώνιο τρίγωνο $ΒΓΔ$ προκύπτει ότι $ΓΔ = 3$, δηλαδή η $ΒΔ$ είναι ύψος και διάμεσος.
Επομένως, $ΑΒ = ΒΓ = 5$. Κατά συνέπεια, $(ΑΒ)\cdot(ΒΓ) = (ΑΓ)\cdot(ΒΔ) \Rightarrow$
$25 = 24$, άτοπο.

β) Τα λάθη παρουσιάζονται σε κάθε γραμμή αφού γίνεται χρήση των ιδιοτήτων του ορίου χωρίς αυτό να υπάρχει.
Πράγματι, έστω οι ακολουθίες

$$\alpha_\nu = 2\nu\pi, \nu \in \mathbb{N} \text{ και } \beta_\nu = 2\nu\pi + \frac{\pi}{2}, \nu \in \mathbb{N}$$

Τότε, $\lim \alpha_\nu = +\infty$ και $\lim \beta_\nu = +\infty$
Αλλά,

$$\text{ημ}(\alpha_\nu) = 0$$

και

$$\text{ημ}(\beta_\nu) = 1$$

Επομένως, το $\lim\limits_{x\to+\infty} \text{ημ}x$ δεν υπάρχει

Ερώτηση 4.

α) Να δείξετε ότι ο αριθμός $\alpha_\nu = \frac{1}{12}\cdot 36^\nu + 10\cdot 3^\nu$, $\nu \in \mathbb{N}$ διαιρείται με το 33.

(μονάδες 4)

β) i. Να δείξετε ότι

$$\binom{\nu}{2} = \binom{\kappa}{2} + \kappa(\nu-\kappa) + \binom{\nu-\kappa}{2}, \ 2 \le \kappa \le \nu - 2 \qquad \nu, \kappa \in \mathbb{N}$$

ii. Να διατυπώσετε ένα συνδυαστικό πρόβλημα του οποίου η λύση να εκφράζεται από την πιο πάνω ταυτότητα.

(μονάδες 6)

Λύση

α) Για $\nu = 1$, $\alpha_1 = \frac{1}{12} \cdot 36^1 + 10 \cdot 3^1 = 33$ η πρόταση είναι αληθής

Αν $\nu = \kappa$ τότε $\alpha_\kappa = \frac{1}{12} \cdot 36^\kappa + 10 \cdot 3^\kappa$. Έστω $33|\alpha_\kappa$

δηλαδή, $\exists a \in \mathbb{Z}: a_\kappa = 33a$

Αρκεί να δείξουμε ότι $\exists \beta \in \mathbb{Z}$: $\alpha_{\kappa+1} = \frac{1}{12} \cdot 36^{\kappa+1} + 10 \cdot 3^{\kappa+1} = 33\beta$

$$\begin{aligned}
\alpha_{\kappa+1} &= \frac{1}{12} \cdot 36^{\kappa+1} + 10 \cdot 3^{\kappa+1} \\
&= \frac{1}{12} \cdot 36^\kappa \cdot 36 + 10 \cdot 3^\kappa \cdot 3 \\
&= \frac{1}{12} \cdot 36^\kappa \cdot 36 + 30 \cdot 3^\kappa + 330 \cdot 3^\kappa - 330 \cdot 3^\kappa \\
&= \frac{1}{12} \cdot 36^\kappa \cdot 36 + 360 \cdot 3^\kappa - 330 \cdot 3^\kappa \\
&= 36\left(\frac{1}{12} \cdot 36^\kappa + 10 \cdot 3^\kappa\right) - 330 \cdot 3^\kappa \\
&= 36 \cdot 33\alpha - 33 \cdot 10 \cdot 3^\kappa \\
&= 33\,(36\alpha - 10 \cdot 3^\kappa) \\
&= 33\beta \ \text{ όπου } \beta = (36\alpha - 10 \cdot 3^\kappa) \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

β) i. **1ος τρόπος**

Με χρήση τύπου συνδυασμών:

$$\begin{aligned}
\binom{\kappa}{2} + \kappa(\nu-\kappa) + \binom{\nu-\kappa}{2} &= \frac{\kappa!}{2!\,(\kappa-2)!} + \kappa(\nu-\kappa) + \frac{(\nu-\kappa)!}{2!\,(\nu-\kappa-2)!} \\
&= \frac{1}{2!}\kappa(\kappa-1) + \kappa(\nu-\kappa) + \frac{1}{2!}(\nu-\kappa)(\nu-\kappa-1) \\
&= \frac{1}{2!}(\kappa^2 - \kappa + 2\kappa\nu - 2\kappa^2 + \nu^2 - 2\kappa\nu + \kappa^2 - \nu + \kappa) = \frac{1}{2!}(\nu^2 - \nu) \\
&= \frac{\nu(\nu-1)}{2!} = \frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)!}{2!\,(\nu-2)!} = \frac{\nu!}{2!\,(\nu-2)!} = \binom{\nu}{2}
\end{aligned}$$

2ος τρόπος

Με χρήση της διωνυμικής ταυτότητας:

$$(1+x)^\nu = \sum_{i=0}^{\nu} \binom{\nu}{i} \cdot x^i \quad ,\forall x \in \mathbb{R} \text{ και } \nu \in \mathbb{N} \qquad (1)$$

Συνεπώς,

$$\begin{aligned}
(1+x)^\nu &= (1+x)^\kappa \cdot (1+x)^{\nu-\kappa} \\
&= \sum_{i=0}^{\kappa} \binom{\kappa}{i} \cdot x^i \cdot \sum_{j=0}^{\nu-\kappa} \binom{\nu-\kappa}{j} \cdot x^j \quad ,\nu \geq \kappa \qquad (2)
\end{aligned}$$

Συγκρίνοντας τον συντελεστή του x^2 στις (1) και (2) λαμβάνουμε

$$\binom{\nu}{2} = \binom{\kappa}{2}\binom{\nu-\kappa}{0} + \binom{\kappa}{1}\binom{\nu-\kappa}{1} + \binom{\kappa}{0}\binom{\nu-\kappa}{2} = \binom{\kappa}{2} + \kappa(\nu-\kappa) + \binom{\nu-\kappa}{2}$$

ii. Συνδυαστικό πρόβλημα.

«Να βρείτε με πόσους τρόπους μπορούν να επιλεγούν 2 άτομα από ένα σύνολο ν ατόμων $(\nu \geq 4)$ αν το σύνολο αποτελείται από κ άνδρες και $(\nu-\kappa)$ γυναίκες.»

Η επιλογή μπορεί να γίνει με δύο τρόπους:

(α) Από τα ν άτομα επιλέγονται 2 με $\binom{\nu}{2}$ τρόπους χωρίς να ενδιαφέρει το φύλο.

(β) Α΄ περίπτωση Από τους κ άνδρες επιλέγονται 2 με $\binom{\kappa}{2}$ τρόπους.

Β΄ περίπτωση από τις $(\nu-\kappa)$ γυναίκες επιλέγονται 2 με $\binom{\nu-\kappa}{2}$ τρόπους.

Γ΄ περίπτωση επιλέγονται 1 άνδρας και 1 γυναίκα με

$$\binom{\kappa}{1}\binom{\nu-\kappa}{1} = \kappa \cdot (\nu-\kappa) \text{ τρόπους.}$$

Επομένως, από την αρχή του αθροίσματος προκύπτει ότι οι συνολικοί τρόποι είναι το άθροισμα των επιμέρους και τελικά

$$\binom{\nu}{2} = \binom{\kappa}{2} + \kappa(\nu-\kappa) + \binom{\nu-\kappa}{2}$$

Ερώτηση 5.

α) i. Έστω $\beta > \alpha$ και $f:[\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση για την οποία ισχύει

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = 0$$

Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in [\alpha,\beta]$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = 0$.

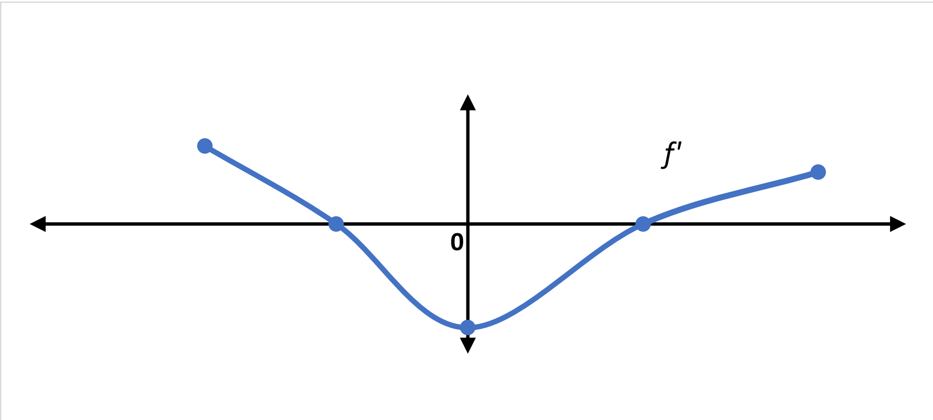
(μονάδες 3)

ii. Να εξετάσετε αν η συνέχεια της f είναι αναγκαία υπόθεση για το αποτέλεσμα $f(\xi) = 0$.

(μονάδες 2)

β) Έστω συνάρτηση f συνεχής και παραγωγίσιμη στο διάστημα $[-6\,,8]$ με $f(-6) = 5$ και $f(8) = 4$. Για την παράγωγο f', η γραφική παράσταση της οποίας δίνεται πιο κάτω, ισχύει:

$f'(-6) = 3$, $f'(-3) = 0$, $f'(0) = -4$, $f'(4) = 0$, $f'(8) = 2$



Να βρείτε όλα τα σημεία του διαστήματος $[-6\,,8]$ στα οποία η συνάρτηση f παίρνει την ελάχιστη τιμή της. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(μονάδες 5)

Λύση

α) i. **1^{ος} τρόπος**

Έστω $f(x) \neq 0, \forall x \in [\alpha,\beta]$.

Επειδή η f συνεχής τότε $f(x) > 0 \ \ \forall x \in [\alpha,\beta]$ ή $f(x) < 0 \ \ \forall x \in [\alpha,\beta]$

Αν $f(x) > 0, \forall x \in [\alpha,\beta]$, τότε

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\ dx \geq \int_{\alpha}^{\beta} \min_{x\in[\alpha,\beta]} f(x)\ dx > 0 \text{ Άτοπο}$$

Όμοια, αν $f(x) < 0, \forall x \in [\alpha,\beta]$. Τότε

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\ dx \leq \int_{\alpha}^{\beta} \max_{x\in[\alpha,\beta]} f(x)\ dx < 0 \text{ Άτοπο}$$

Επομένως, υπάρχουν $x_1, x_2 \in [\alpha, \beta]$ με $x_1 \neq x_2$ τέτοια ώστε

$$f(x_1) \cdot f(x_2) < 0$$

και επειδή f συνεχής στο $[x_1, x_2] \subseteq [\alpha, \beta]$ αν $x_1 < x_2$ (αντίστοιχα $[x_2, x_1]$ αν $x_1 > x_2$) τότε από θεώρημα Bolzano $\exists \xi \in (x_1, x_2) \subseteq [\alpha, \beta]$ (αντίστοιχα (x_2, x_1) για $x_1 > x_2$) τέτοιο ώστε $f(\xi) = 0$.

2^{ος} τρόπος

Έστω F μία παράγουσα της f στο $[\alpha, \beta]$. Τότε,

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\ dx = F(\beta) - F(\alpha) = 0 \Longrightarrow F(\alpha) = F(\beta)$$

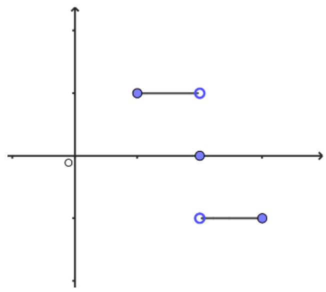
Επίσης, F συνεχής ως παραγωγίσιμη. Επομένως, από θεώρημα Rolle $\exists \xi \in (\alpha, \beta) \subset [\alpha, \beta]$ τέτοιο ώστε $F'(\xi) = 0 \Leftrightarrow \exists \xi \in [\alpha, \beta]: f(\xi) = 0$

ii. Η υπόθεση της συνέχειας δεν είναι αναγκαία.

Παράδειγμα

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} 2 & , x \in \left[\alpha, \dfrac{\alpha+\beta}{2}\right) \\ 0 & , x = \dfrac{\alpha+\beta}{2} \\ -2 & x \in \left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}, \beta\right] \end{cases}$$



τότε

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\ dx = \int_{\alpha}^{\frac{\alpha+\beta}{2}} f(x)\ dx + \int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta} f(x)\ dx$$

$$= 2 \cdot \left(\frac{\alpha+\beta}{2} - \alpha\right) + (-2) \cdot \left(\beta - \frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

$$= \frac{2(\beta-\alpha)}{2} - \frac{2(\beta-\alpha)}{2} = 0$$

Επομένως, για την f υπάρχει $\xi \in [\alpha, \beta]$ για το οποίο $f(\xi) = 0$.

β) Η f ως συνεχής στο $[-6,8]$ παίρνει ελάχιστη τιμή. Επίσης, f παραγωγίσιμη στο $[-6,8]$ επομένως η ελάχιστη τιμή της θα υλοποιείται στα εσωτερικά σημεία του $[-6\,,8]$ όπου η παράγωγος ισούται με μηδέν ή στα άκρα $\{6\,,8\}$ του ίδιου διαστήματος.

Κατασκευάζουμε τον πίνακα προσήμου της f' και μονοτονίας της f. Από τον πίνακα παρατηρούμε ότι η ελάχιστη τιμή είναι το $f(4)$ ή το $f(-6)$.

x	-6		-3		4		8
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		↗		↘		↗	

Η f είναι γνησίως αύξουσα στα $[4{,}8]$ και $[-6{,}3]$ ενώ είναι γνησίως φθίνουσα στο $[-3{,}4]$. Επομένως $f(4) < f(8)$. Επιπλέον,

$$f(-6) = 5 > 4 = f(8) > f(4)$$

Συνεπώς,

$$f(4) \leq f(x), \forall x \in [-6{,}8]$$

με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = 4$.

Έτσι, η συνάρτηση παίρνει την ελάχιστη της τιμή $f(4)$, μόνο όταν $x = 4$.

Ερώτηση 6.

Δύο μη κενά σύνολα X και Y είναι ισοπληθικά, αν και μόνον αν υπάρχει συνάρτηση $f: X \to Y$ που είναι $1-1$ και επί.

α) Να δείξετε ότι τα διαστήματα $[0{,}1]$ και $[0,\pi]$ είναι ισοπληθικά.

(μονάδες 4)

β) Να εξετάσετε αν η πιο κάτω πρόταση είναι αληθής:

«Όταν η συνάρτηση $g: [0,\pi] \to [0{,}1]$ είναι επί, τότε είναι και $1-1$.»

Να τεκμηριώσετε την απάντησή σας.

(μονάδες 4)

γ) Να δείξετε ότι τα σύνολα των εσωτερικών σημείων δύο τετραγώνων πλευράς 1 και π αντίστοιχα, είναι ισοπληθικά.

(μονάδες 2)

Λύση

α) Έστω η συνάρτηση $f: [0{,}1] \to [0,\pi]$ με $f(x) = \pi x$.

Παρατηρούμε ότι $f'(x) = \pi > 0,\ \forall x \in [0{,}1]$. Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα. Επομένως η f είναι $1-1$.

Αφού f γνησίως αύξουσα ισχύει ότι $f(0) = 0$ ολικό ελάχιστο και $f(1) = \pi$ ολικό μέγιστο.

Επίσης, f συνεχής στο $[0,1]$ και επομένως από θεώρημα ενδιάμεσων τιμών το σύνολο τιμών της συνάρτησης είναι το διάστημα $[0,\pi]$.

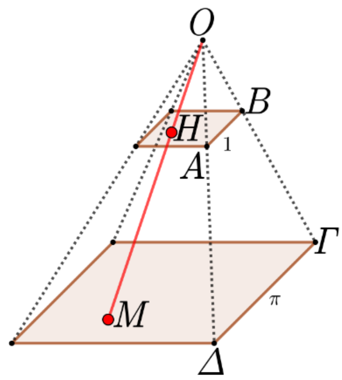
Συνεπώς, η f είναι επί.

β) Αντιπαράδειγμα

Έστω $g(x) = \eta\mu\, x$ τότε η συνάρτηση είναι επί αλλά δεν είναι $1-1$ στο διάστημα $[0,\pi]$. Επειδή,

$$\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4} \in [0,\pi] \text{ με } \frac{\pi}{4} \neq \frac{3\pi}{4} \text{ όμως } g\left(\frac{\pi}{4}\right) = g\left(\frac{3\pi}{4}\right)$$

γ) **1ος τρόπος**



Τοποθετούμε δύο τετράγωνα παράλληλα σε επίπεδο (ε). Έστω ότι οι ευθείες που διέρχονται από τις κορυφές τους συναντιούνται στο O (σχηματισμός πυραμίδας). Παίρνουμε τυχαίο εσωτερικό σημείο M στο τετράγωνο με βάση π και φέρουμε ευθεία προς το O η οποία θα τέμνει το τετράγωνο με βάση 1 σε μοναδικό εσωτερικό σημείο H. Επομένως ορίζει συνάρτηση $1-1$ και επί από το ένα τετράγωνό στο άλλο.

2ος τρόπος

Έστω η συνάρτηση $\varphi: (0,1) \times (0,1) \to (0,\pi) \times (0,\pi)$,   με $(x,y) \mapsto (\pi x, \pi y)$
Αν $(x_1, y_1) \neq (x_2, y_2) \Rightarrow (x_1 \neq x_2) \vee (y_1 \neq y_2)$.
Επομένως, $\pi x_1 \neq \pi x_2 \vee \pi y_1 \neq \pi y_2$. Άρα $(\pi x_1, \pi y_1) \neq (\pi x_2, \pi y_2)$
Άρα η φ είναι 1-1.
Από τα προηγούμενα παρατηρεί κανείς ότι ένα τυχαίο στοιχείο (x,y) του συνόλου $(0,\pi) \times (0,\pi)$ είναι της μορφής $(\pi\alpha, \pi\beta)$ για κάποια $0 < \alpha < 1$ και $0 < \beta < 1$, αφού $x \in (0,\pi)$, $y \in (0,\pi)$. Άρα η φ είναι επί.

Ερώτηση 7.

α) Να διατυπώσετε και να αποδείξετε το θεμελιώδες θεώρημα του ολοκληρωτικού λογισμού.

(μονάδες 4)

β) Έστω $g\colon [\,0\,,1\,] \to \mathbb{R}$ συνεχής. Να υπολογίσετε, αν υπάρχει, το όριο

$$\lim_{x\to 0^+}\left(x\cdot\int_x^1 \frac{g(t)}{t}dt\right)$$

(μονάδες 6)

Λύση

α) Βλέπε σχολικό εγχειρίδιο (Μαθηματικά Γ' Λυκείου Κατεύθυνσης, τεύχος Β', Β΄ έκδοση 2019, σελ. 97).

β) Η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $[0,1]$ και επομένως είναι φραγμένη. Δηλαδή,

$$|g(t)| \le A, \forall\ t \in [0,1]$$

για κάποιον θετικό αριθμό A. Άρα, για $0 < x < 1$ έχουμε ότι

$$\left|\int_x^1 \frac{g(t)}{t}dt\right| \le \left(A\cdot\int_x^1 \frac{1}{t}dt\right) = A(\ln 1 - \ln x) = -A\ln x$$

Συνεπώς, για $0 < x < 1$, ισχύει ότι

$$\left|x\int_x^1 \frac{g(t)}{t}dt\right| \le -Ax\ln x \qquad (1)$$

Όμως,

$$\lim_{x\to 0^+}(x\ln x) = 0$$

(βλ. Μαθηματικά Γ' Λυκείου Κατεύθυνσης, τεύχος Α', Β΄ έκδοση 2019, σελ. 13).

Άρα, $\lim\limits_{x\to 0^+}(-Ax\ln x) = 0$

Από τις σχέσεις (1) και (2), σε συνδυασμό με το κριτήριο της παρεμβολής, έχουμε

$$\lim_{x\to 0^+}\left(x\cdot\int_x^1 \frac{g(t)}{t}dt\right) = 0$$

Ερώτηση 8.

α) Ρίχνουμε ένα αμερόληπτο ζάρι (κύβος) ν φορές, $\nu \geq 3$.
Ορίζουμε το ενδεχόμενο A_{ij}: «η ρίψη i και η ρίψη j φέρουν την ίδια ένδειξη»
Να δείξετε ότι τα ενδεχόμενα $\{A_{ij}: 1 \leq i < j \leq \nu\}$ είναι ανά δύο ανεξάρτητα, αλλά όχι ανεξάρτητα.

(μονάδες 5)

β) Για p, πρώτο αριθμό, ορίζουμε $\Omega = \{1,2,3,\dots,p\} \subset \mathbb{N}$. Με δειγματικό χώρο το Ω ορίζουμε την πιθανότητα

$$P(A) = \frac{\nu(A)}{p}, \qquad \forall A \subseteq \Omega$$

όπου $\nu(A)$ ο πληθικός αριθμός του συνόλου A. Αν τα ενδεχόμενα $B, \Gamma \subseteq \Omega$ είναι ανεξάρτητα, να δείξετε ότι ένα τουλάχιστον από αυτά ταυτίζεται με το $\emptyset$ ή το Ω.

(μονάδες 5)

Λύση

α)Έστω $i < j$ και $m < n$.

- Αν $j < m$, τότε τα ενδεχόμενα A_{ij} και A_{mn} ορίζονται από ανεξάρτητες ρίψεις άρα είναι μεταξύ τους ανεξάρτητα.
- Αν $j = m$, τότε ορίζουμε τα ενδεχόμενα B_{ij}: «ένδειξη j στη ρίψη i»

$$\begin{aligned}P(A_{ij} \cap A_{jn}) &= P(\text{οι ρίψεις } i,j \text{ και } n \text{ φέρουν την ίδια ένδειξη})\\ &= \sum_{\kappa=1}^{6} P(B_{i\kappa} \cap B_{j\kappa} \cap B_{n\kappa})\\ &= \sum_{\kappa=1}^{6} \left(P(B_{i\kappa}) \cdot P(B_{j\kappa}) \cdot P(B_{n\kappa})\right) \quad \text{(λόγω ανεξαρτησίας)}\\ &= \sum_{\kappa=1}^{6} \left(\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}\right) = \frac{1}{36} = P(A_{ij})P(A_{jn})\end{aligned}$$

Άρα τα ενδεχόμενα είναι ανά δύο ανεξάρτητα.

Έστω τα ενδεχόμενα A_{ij} , $A_{j\kappa}$ και $A_{i\kappa}$ με $i \neq j \neq \kappa$ τότε

$$\begin{aligned}P(A_{ij} \cap A_{j\kappa} \cap A_{i\kappa}) &= P(\text{οι ρίψεις } i,j \text{ και } \kappa \text{ φέρουν την ίδια ένδειξη})\\ &= \frac{1}{36} \quad \text{(από τα πιο πάνω)}\end{aligned}$$

και

$$P(A_{ij})P(A_{j\kappa})P(A_{i\kappa}) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{216}$$

Αφού,

$$P(A_{ij} \cap A_{j\kappa} \cap A_{i\kappa}) \neq P(A_{ij})P(A_{j\kappa})P(A_{i\kappa})$$

τα ενδεχόμενα δεν είναι ανεξάρτητα.

β) Έστω B, Γ ανεξάρτητα ενδεχόμενα με $\nu(B) = \beta$, $\nu(\Gamma) = \gamma$ και $\nu(B \cap \Gamma) = \kappa$. Τότε,

$$P(B \cap \Gamma) = P(B)P(\Gamma) \Rightarrow \frac{\kappa}{p} = \frac{\beta}{p} \cdot \frac{\gamma}{p} \Rightarrow p\kappa = \beta\gamma \Rightarrow p|\beta\gamma \Rightarrow p|\beta \;\; \vee \;\; p|\gamma$$

Αν $p|\beta \Rightarrow \beta = p \;\; \vee \;\; \beta = 0$ αφού $\nu(B) \leq \nu(\Omega) \Rightarrow \beta \leq p$

Επομένως $B = \emptyset$ ή $B = \Omega$

Όμοια αν $p|\gamma$ προκύπτει $\Gamma = \emptyset$ ή $\Gamma = \Omega$.

Ερώτηση 9.

Δίνεται κυρτό τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ και σημείο H εντός αυτού, για τα οποία ισχύουν

$$\overrightarrow{H\Gamma} - \overrightarrow{A\Delta} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AH} \quad \text{και} \quad \left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A\Delta}\right| = \left|\overrightarrow{A\Delta} - \overrightarrow{AB}\right|$$

α) Να δείξετε ότι το $AB\Gamma\Delta$ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο.

(μονάδες 4)

β) Ορίζουμε το ενδεχόμενο K: «ένα τυχαία επιλεγμένο σημείο Σ εντός του ορθογωνίου παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$ βρίσκεται πιο κοντά στην κορυφή B από ότι στην A και πιο μακριά από την πλευρά AB από ότι τη $B\Gamma$». Αν το εμβαδόν του $AB\Gamma\Delta$ είναι $E = 80$ και η πιθανότητα $P(K) = \frac{2}{5}$, να υπολογίσετε τις διαστάσεις του ορθογωνίου παραλληλογράμμου.

(μονάδες 6)

Λύση

(α) $\overrightarrow{H\Gamma} - \overrightarrow{A\Delta} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AH}$

Παίρνοντας ως σημείο αναφοράς το σημείο Δ,

$$\Rightarrow \overrightarrow{\Delta\Gamma} - \overrightarrow{\Delta H} + \overrightarrow{\Delta A} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{\Delta H} + \overrightarrow{\Delta A}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{\Delta\Gamma} = \overrightarrow{AB}$$

Επομένως, $\Delta\Gamma$ και AB είναι ίσες και παράλληλες άρα $AB\Gamma\Delta$ παραλληλόγραμμο.

Επιπλέον,

$$|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A\Delta}| = |\overrightarrow{A\Delta} - \overrightarrow{AB}|$$

$$\xRightarrow[\overrightarrow{A\Delta}=\overrightarrow{B\Gamma}]{AB\Gamma\Delta\#} |\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B\Gamma}| = |\overrightarrow{A\Delta} + \overrightarrow{BA}|$$

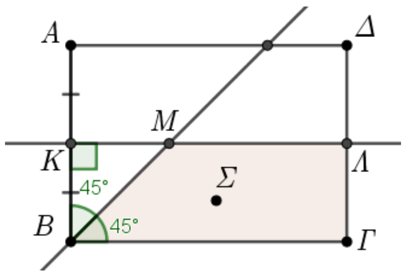
$$\Rightarrow |\overrightarrow{A\Gamma}| = |\overrightarrow{B\Delta}|$$

$$\Rightarrow (A\Gamma) = (B\Delta)$$

Άρα οι διαγώνιοι του παραλληλογράμμου $AB\Gamma\Delta$ ισούνται.

Επομένως, το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο με ίσες διαγωνίους άρα είναι ορθογώνιο.

(β) Για να βρίσκεται το σημείο πιο κοντά στην κορυφή B από ότι στην A πρέπει να βρίσκεται στο ίδιο ημιεπίπεδο με το B το οποίο ορίζει η μεσοκάθετος $K\Lambda$ του τμήματος AB και να είναι εντός του ορθογωνίου.



Για να βρίσκεται πιο μακριά από την AB συγκριτικά με τη $B\Gamma$ πρέπει να βρίσκεται στο ίδιο ημιεπίπεδο με το Γ το οποίο ορίζει η διχοτόμος της γωνιάς $\hat{B}$.

Επομένως, το σημείο Σ πρέπει να βρίσκεται στην τομή των δυο αυτών συνόλων δηλαδή στο τετράπλευρο $BM\Lambda\Gamma$, όπου M το σημείο τομής της διχοτόμου της γωνίας $\hat{B}$ και της μεσοκαθέτου $K\Lambda$, (όπως φαίνεται και στο πιο πάνω σχήμα).

Θέτουμε $KB = \alpha$ και $B\Gamma = \beta$.

Στο τρίγωνο BKM έχουμε $\widehat{M} = 180° - 90° - 45° = 45°$ άρα $KM = KB = \alpha$.

$$E_{BM\Lambda\Gamma} = E_{BK\Lambda\Gamma} - E_{\overset{\Delta}{BKM}} = \frac{E_{AB\Gamma\Delta}}{2} - \frac{(BK)(KM)}{2} = \frac{80}{2} - \frac{\alpha^2}{2} = 40 - \frac{\alpha^2}{2}$$

Η πιθανότητα του ενδεχομένου που περιγράφεται στη διατύπωση, είναι,

$$P(K) = \frac{E_{BM\Lambda\Gamma}}{E_{AB\Gamma\Delta}} \Rightarrow E_{BM\Lambda\Gamma} = P(K) \cdot E_{AB\Gamma\Delta}$$

$$= \frac{2}{5} \cdot 80 = 32 \Rightarrow 40 - \frac{\alpha^2}{2} = 32 \Rightarrow \frac{\alpha^2}{2} = 8$$

$$\Rightarrow \alpha^2 = 16 \overset{\alpha>0}{\Longrightarrow} \alpha = 4$$

$$(AB) = 2\alpha = 8$$

$$E_{AB\Gamma\Delta} = (AB)(B\Gamma) \Rightarrow 80 = 8\beta \Rightarrow \beta = 10$$

Επομένως, το ορθογώνιο έχει μήκος 10 και πλάτος 8.

Ερώτηση 10.

Θεωρούμε το ευθύγραμμο τμήμα AB με $(AB) = 1$.

α) Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των σημείων $\varGamma$, που είναι κορυφές των τριγώνων $AB\varGamma$, ώστε το εμβαδόν τους να είναι $E = 2$.

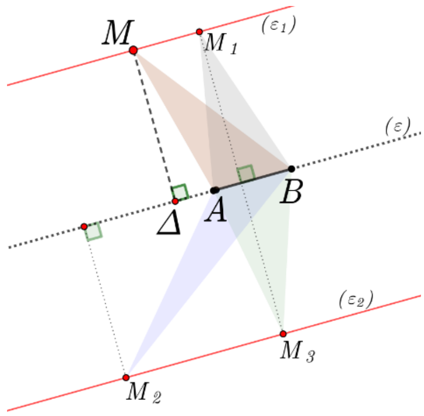
(μονάδες 6)

β) Να περιγράψετε την κατασκευή του γεωμετρικού τόπου.

(μονάδες 4)

Λύση

Ανάλυση:



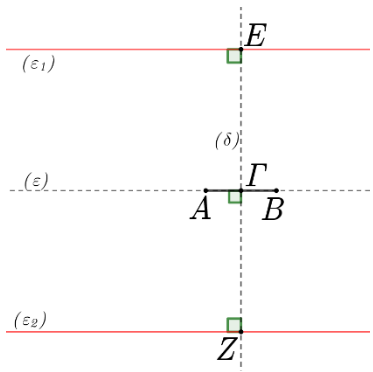
Έστω (ε) η ευθεία που περιέχει το AB και έστω M σημείο του γεωμετρικού τόπου. Φέρνουμε το ύψος $M\varDelta$ του τριγώνου AMB. Τότε $2 = E_{ABM} = \frac{1}{2}(AB)(M\varDelta) \Rightarrow (M\varDelta) = 4$. Άρα το M απέχει σταθερή απόσταση 4 από τη σταθερή ευθεία (ε). Συνεπώς το M ανήκει σε ευθεία, παράλληλη προς την (ε) και σε απόσταση 4 από την (ε). Υπάρχουν δύο τέτοιες ευθείες οι (ε_1) και (ε_2).

Αντίστροφο:

Έστω M σημείο σε μια από τις δύο ευθείες. Τότε το εμβαδόν του τριγώνου AMB είναι $\frac{1}{2}(AB)(M\varDelta)$, όπου $M\varDelta$ η προβολή του M πάνω στην (ε). Τότε $E_{MAB} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 4 = 2$. Άρα το M ανήκει στο γεωμετρικό τόπο.

Συνεπώς ο γεωμετρικός τόπος είναι οι ευθείες (ε_1) και (ε_2).

Κατασκευή:



Κατασκευάζουμε τη μεσοκάθετη (δ) του AB (βλ. σχολικό βιβλίο, Μαθηματικά Β΄ Λυκείου Κατεύθυνσης, Τεύχος Β΄, έκδοση 2021, σελ. 137), που περνά από το σημείο $\varGamma$ του AB. Με κέντρο το $\varGamma$ και ακτίνα $4(AB)$ γράφουμε κύκλο που τέμνει τη (δ) στα σημεία Z και E. Στα σημεία Z και E κατασκευάζουμε ευθείες (ε_1) και (ε_2) αντίστοιχα, κάθετες στην (δ), (βλ. σχολικό βιβλίο, Μαθηματικά Β΄ Λυκείου Κατεύθυνσης, Τεύχος Β΄, έκδοση 2021, σελ. 136). Οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) είναι ο γεωμετρικός τόπος.