

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ, ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ ΚΑΙ ΝΕΟΛΑΙΑΣ
ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΑΝΩΤΕΡΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

ΓΡΑΠΤΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΓΙΑ ΕΓΓΡΑΦΗ ΚΑΙ ΚΑΤΑΤΑΞΗ
ΣΤΟΥΣ ΠΙΝΑΚΕΣ ΔΙΟΡΙΣΙΜΩΝ 2021

Εξεταζόμενο Αντικείμενο (κωδικός): ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (517)

Ημερομηνία και ώρα εξέτασης: 18 Νοεμβρίου 2021, 15:30 – 18:30

ΤΟ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟ ΔΟΚΙΜΙΟ ΑΠΟΤΕΛΕΙΤΑΙ ΑΠΟ ΤΕΣΣΕΡΕΙΣ (4) ΣΕΛΙΔΕΣ

Το εξεταστικό δοκίμιο αποτελείται από δέκα (10) ερωτήσεις.

Απαντήστε και στις δέκα (10) ερωτήσεις.

Η κάθε ερώτηση βαθμολογείται με 10 μονάδες.

Όλες οι απαντήσεις να καταγραφούν στο **Τετράδιο Απαντήσεων**.

Σε κάθε απάντηση να αναγράφεται **τον αριθμό της ερώτησης**.

Στη λύση των ασκήσεων πρέπει να φαίνεται όλη η αναγκαία εργασία.

Μόνο τα σχήματα μπορούν να γίνουν με μολύβι.

Επιτρέπεται η χρήση μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.

Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υλικού.

Ερώτηση 1.

1.1. Μαθητής παρατηρεί ότι $3^2 - 1 = 4 \cdot 2$, $5^2 - 1 = 4 \cdot 6$, $7^2 - 1 = 4 \cdot 12$
και υποθέτει ότι το αποτέλεσμα ισχύει γενικά.

α) Διατυπώστε την υπόθεση του μαθητή ως μαθηματική πρόταση.

(μονάδες 2)

β) Εξετάστε αν η εν λόγω πρόταση είναι αληθής ή ψευδής.

(μονάδες 3)

1.2. Αν ένας φυσικός αριθμός $n > 1$ έχει περιττό διαιρέτη $k > 1$, να αποδείξετε ότι ο αριθμός $2^n + 1$ είναι σύνθετος.

(μονάδες 5)

Ερώτηση 2.

Να δείξετε ότι το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα δύο πλευρών τριγώνου:

- α) είναι παράλληλο προς την τρίτη πλευρά του τριγώνου
- β) έχει μήκος ίσο με το μισό του μήκους της τρίτης πλευράς

Να δώσετε **δύο διαφορετικές** λύσεις, **μία** με χρήση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας και **μία** με χρήση του Διανυσματικού Λογισμού.

(μονάδες 10)

Ερώτηση 3.

Σε τάξη δόθηκε η άσκηση: «Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ που ικανοποιεί τη σχέση: $xf(x) - 2 = f(x) - \sqrt{3x^2 + 1}$. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης»

Μαθήτριά πρότεινε την πιο κάτω λύση:

$$\begin{aligned}xf(x) - 2 &= f(x) - \sqrt{3x^2 + 1} \Rightarrow xf(x) - f(x) = 2 - \sqrt{3x^2 + 1} \\ \Rightarrow (x - 1)f(x) &= 2 - \sqrt{3x^2 + 1} \Rightarrow f(x) = \frac{2 - \sqrt{3x^2 + 1}}{x - 1}\end{aligned}$$

3.1. Να εξετάσετε αν η προτεινόμενη λύση είναι πλήρης. Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

(μονάδες 3)

3.2. Σε περίπτωση που δεν είναι πλήρης δώστε μια ολοκληρωμένη λύση.

(μονάδες 7)

Ερώτηση 4.

Στις πιο κάτω περιπτώσεις υπολογίστε το όριο όπου υπάρχει, διαφορετικά να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει:

4.1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - \eta\mu x}{x}$ (μονάδες 2,5)

4.2. $\lim_{x \rightarrow \infty} x\eta\mu x$ (μονάδες 2,5)

4.3. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$, όπου $f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x} + 1, & x < 1 \\ \sqrt{x-1} + 1, & x \geq 1 \end{cases}$ (μονάδες 2,5)

4.4. $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x^2(x-1)(x+1)}$ (μονάδες 2,5)

Ερώτηση 5.

5.1. Δύο άτομα ρίχνουν ένα αμερόληπτο νόμισμα ν φορές το κάθε άτομο. Να δείξετε ότι η πιθανότητα να φέρουν ίσο αριθμό ρίψεων με ένδειξη «κεφαλή» είναι:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{2\nu} \cdot \sum_{\kappa=0}^{\nu} \binom{\nu}{\kappa}^2$$

(μονάδες 4)

5.2. Τα A , B και Γ είναι ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου. Να αποδείξετε την ορθότητα ή όχι των ισχυρισμών:

5.2.1. Αν $P(A \cap B \cap \Gamma) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(\Gamma)$, τότε τα ενδεχόμενα A , B και Γ είναι ανά δύο ανεξάρτητα

(μονάδες 3)

5.2.2. Αν $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$, $P(A \cap \Gamma) = P(A) \cdot P(\Gamma)$ και $P(B \cap \Gamma) = P(B) \cdot P(\Gamma)$, τότε $P(A \cap B \cap \Gamma) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(\Gamma)$

(μονάδες 3)

Ερώτηση 6.

Μια διμελής σχέση R λέγεται σχέση ισοδυναμίας σε ένα σύνολο A , αν ισχύουν τα εξής:

- i) $(x, x) \in R$, $\forall x \in A$
- ii) Αν $(x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R$, όπου $x, y \in A$
- iii) Αν $(x, y) \in R$ και $(y, z) \in R \Rightarrow (x, z) \in R$, όπου $x, y, z \in A$

Για κάθε θετικό ακέραιο αριθμό n , ορίζουμε την ακόλουθη διμελή σχέση R_n στο σύνολο των ακεραίων \mathbb{Z} :

$$(x, y) \in R_n \Leftrightarrow n|(x - y)$$

6.1. Να δείξετε ότι η R_n είναι σχέση ισοδυναμίας.

(μονάδες 3)

6.2. Για $x \in \mathbb{Z}$, ορίζουμε το σύνολο $[x] := \{y \in \mathbb{Z} : (x, y) \in R_5\}$. Να γράψετε τέσσερα στοιχεία, δύο θετικά και δύο αρνητικά, που περιέχονται στο σύνολο $[-7]$. Να δικαιολογήσετε κάθε φορά την απάντησή σας.

(μονάδες 4)

6.3. Αν $(x, y) \in R_7$, να βρείτε όλα τα $k \in \mathbb{Z}$, έτσι ώστε $(-x + k, -y + 2k) \in R_7$.

(μονάδες 3)

Ερώτηση 7.

Ένας ηλεκτρονικός γραφέας σημειώνει τυχαία σημεία σε τετράγωνο με κορυφές τα σημεία $A(-4,4)$, $B(4,4)$, $\Gamma(4,-4)$ και $\Delta(-4,-4)$. Η πιθανότητα ο γραφέας να σημειώσει σε οποιοσδήποτε δύο ισεμβαδικές περιοχές του τετραγώνου είναι η ίδια.

Αποτυπώνοντας γραφικά το πρόβλημα, σε κάθε μια από τις πιο κάτω περιπτώσεις, να υπολογίσετε την πιθανότητα το επόμενο σημείο που θα σημειώσει ο γραφέας:

7.1. Να απέχει απόσταση μεγαλύτερη των 2 μονάδων από το σημείο $(0,0)$.
(μονάδες 2,5)

7.2. Να απέχει απόσταση μεγαλύτερη ή ίση των 2 μονάδων από την ευθεία $x = 3$.
(μονάδες 2,5)

7.3. Να απέχει απόσταση ίση με μία μονάδα από το σημείο $(3,3)$.
(μονάδες 2,5)

7.4. Οι συντεταγμένες του (x, y) να ικανοποιούν την ανίσωση $|x| + |y| \leq 3$.
(μονάδες 2,5)

Ερώτηση 8.

Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα AB και τυχαίο σημείο του Γ ανάμεσα στα σημεία A και B . Σχηματίζουμε τα ισόπλευρα τρίγωνα $A\Gamma\Delta$ και ΓBE , προς το ίδιο ημιεπίπεδο, σε σχέση με την ευθεία που διέρχεται από τα σημεία A και B . Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο του σημείου M στο οποίο τέμνονται τα ευθύγραμμα τμήματα AE και $B\Delta$.

(μονάδες 10)

Ερώτηση 9.

Έστω $f, g: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμες συναρτήσεις, τέτοιες ώστε $f \neq g$. Ορίζουμε την συνάρτηση $h(x) := \max\{f(x), g(x)\}$, $x \in (a, b)$.

Να προσδιορίσετε τα σημεία του διαστήματος (a, b) στα οποία η συνάρτηση $h(x)$ είναι παραγωγίσιμη.

(μονάδες 10)

Ερώτηση 10.

Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και έστω $A\Delta$ η εσωτερική διχοτόμος.

Να δείξετε ότι:

10.1. $(B\Delta) = \frac{(B\Gamma)(AB)}{(AB)+(A\Gamma)}$ (μονάδες 3)

10.2. $(A\Delta)^2 = (AB)(A\Gamma) - (A\Delta)(\Delta\Gamma)$
(μονάδες 7)

ΤΕΛΟΣ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟΥ ΔΟΚΙΜΙΟΥ