ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ,
ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ ΚΑΙ ΝΕΟΛΑΙΑΣ

ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΑΝΩΤΕΡΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗΣ
ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

ΓΡΑΠΤΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΓΙΑ ΕΓΓΡΑΦΗ ΚΑΙ ΚΑΤΑΤΑΞΗ
ΣΤΟΥΣ ΠΙΝΑΚΕΣ ΔΙΟΡΙΣΙΜΩΝ 2019

Εξεταζόμενο αντικείμενο (Κωδικός): Μαθηματικά (517)

Ημερομηνία και ώρα εξέτασης: 19 Νοεμβρίου 2019, 15:30 – 18:30

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

Ερώτηση 1. *Να βρείτε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$ που επαληθεύουν τις παρακάτω σχέσεις. Για κάθε μία από αυτές τις σχέσεις να διατυπώσετε και να σχολιάσετε ένα αναμενόμενο λάθος των μαθητών.*

1.1 $|2x+1| = 8$ *(Μονάδες 2)*

1.2 $|2x-1| + |2x+1| = 0$ *(Μονάδες 2)*

1.3 $|x+2| + |x+6| \geq 8$ *(Μονάδες 2)*

1.4 $|x-2| + |x-6| = 8$ *(Μονάδες 2)*

1.5 $|x-1| + |x-2| = -3$ *(Μονάδες 2)*

Λύση.

1.1 $|2x+1| = 8 \Rightarrow 2x+1 = 8$ ή $2x+1 = -8 \Rightarrow x = \frac{7}{2}$ ή $x = -\frac{9}{2}$

Δηλαδή οι τιμές του $x \in \mathbb{R}$ που επαληθεύουν την σχέση είναι $x = \frac{7}{2}$ ή $x = -\frac{9}{2}$

Αναμενόμενο λάθος μαθητών
- Εξετάζει μόνο μία περίπτωση
- Υποθέτει ότι $x \geq 0$

1.2 $|2x-1| + |2x+1| = 0 \Rightarrow 2x-1 = 0$ και $2x+1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$ και $x = -\frac{1}{2}$

Αδύνατη εξίσωση, δηλαδή δεν υπάρχουν τιμές $x \in \mathbb{R}$ που να επαληθεύουν την σχέση.

Αναμενόμενο λάθος μαθητών
- Δεν κατανοεί τι σημαίνει ο σύνδεσμος “και” σε μαθηματικές προτάσεις
- Θεωρεί ότι “$2x-1 = -(2x+1)$”

1.3 $|x+2|+|x+6| \geq 8$

Εξετάζουμε ξεχωριστά τις περιπτώσεις

(i) $x \in (-\infty, -6]$

(ii) $x \in (-6, -2]$

(iii) $x \in (-2, +\infty]$

(i) $x \leq -6 \Longrightarrow -x-2-x-6 \geq 8 \Rightarrow -2x \geq 16 \Rightarrow x \leq -8,$ *άρα* $x \in (-\infty, -8]$

(ii) $-6 < x \leq -2 \Longrightarrow -x-2+x+6 \geq 8 \Rightarrow 4 \geq 8$ *Αδύνατο*

(iii) $x > -2 \Longrightarrow x+2+x+6 \geq 8 \Rightarrow x \geq 0$ *άρα,* $x \in [0, +\infty)$

Δηλαδή οι τιμές που επαληθεύουν την σχέση είναι $x \in (-\infty, -8] \cup [0, +\infty)$

Αναμενόμενο λάθος μαθητών

- Δεν εξετάζει 3 περιπτώσεις

- Δεν αλλάζει πρόσημο στην ανισότητα

- Δεν απορρίπτει την αδύνατη

1.4 $|x-2|+|x-6| = 8$

(i) $x \leq 2 \Longrightarrow -x+2-x+6 = 8 \Rightarrow -2x = 0 \Rightarrow x = 0$

(ii) $2 < x \leq 6 \Longrightarrow x-2-x+6 = 8 \Rightarrow 0x = 4$ *Αδύνατη εξίσωση*

(iii) $x > 6 \Longrightarrow x-2+x-6 = 8 \Rightarrow 2x = 16 \Rightarrow x = 8$

Δηλαδή οι τιμές που επαληθεύουν την σχέση είναι $x = 0$ *ή* $x = 8$

Αναμενόμενο λάθος μαθητών

- Δεν αναγνωρίζουν το αδύνατο της εξίσωσης

- Διαγράφουν τις απόλυτες τιμές, χωρίς να εξετάζουν περιπτώσεις

- Παίρνουν δύο περιπτώσεις ως $(x-2)+(x-6) = \pm 8$

1.5 $|x-1|+|x-2| = -3$

Αδύνατη εξίσωση, επειδή το αριστερό μέλος είναι μη αρνητικός αριθμός ενώ το δεξιό μέλος είναι αρνητικός αριθμός.

Αναμενόμενο λάθος μαθητών

- Δεν αναγνωρίζουν το αδύνατο της εξίσωσης

- Λύνει την εξίσωση "$(x-1)+(x-2) = -3$*"*

Ερώτηση 2.

2.1 *Ένας καθηγητής ρώτησε τους μαθητές μιας τάξης: «Με πόσους τρόπους μπορούμε να κατανέμουμε ν διαφορετικές μεταξύ τους μπάλες σε κ διαφορετικά κουτιά, με την παραδοχή ότι σε κάθε κουτί ξεχωριστά μπορούν να χωρέσουν όλες οι μπάλες;»*

Ένας μαθητής αμέσως απάντησε: «με κ^{ν} *τρόπους».*

Ένας δεύτερος μαθητής όμως ζήτησε διευκρινήσεις. Πώς θα μπορούσατε να εξηγήσετε στους μαθητές κατά πόσο η απάντηση του πρώτου μαθητή είναι ορθή ή λανθασμένη;

(Μονάδες 3)

2.2 *Διατυπώστε ένα σχετικό πρόβλημα με αυτό που περιγράφεται στο Ερώτημα* **2.1***, όπου το ζητούμενο, να είναι οι δυνατοί τρόποι εμφάνισης κάποιου ενδεχομένου. Η απάντηση στο πρόβλημα να είναι:* $\binom{\nu}{\kappa}\cdot\kappa^{\nu-\kappa}$

(Μονάδες 7)

Λύση.
2.1 *Η πρώτη μπάλα έχει κ τρόπους να τοποθετηθεί (σε οποιοδήποτε από τα κ κουτιά).*

Για κάθε ένα από αυτούς τους τρόπους η δεύτερη μπάλα έχει επίσης κ τρόπους τοποθέτησης.
Η διαδικασία συνεχίζεται με τον ίδιο τρόπο μέχρι και τη ν-οστή μπάλα.
Με βάση την πολλαπλασιαστική αρχή συνολικά υπάρχουν $\kappa\cdot\kappa\cdot\kappa\cdots\kappa=\kappa^{\nu}$ *δυνατοί τρόποι.*

2.2 *Με πόσους τρόπους μπορούν να τοποθετηθούν ν μπάλες σε κ κουτιά (κάθε κουτί μπορεί να δεχθεί από 1 μέχρι και όλες τις μπάλες) αν* $\nu\geq\kappa$ *και αν σε κάθε κουτί μπαίνει μια τουλάχιστον μπάλα;*

Ερώτηση 3. *Δίνεται η συνάρτηση* $f(x)=\sqrt{x^2+x+1}, \qquad x\in\mathbb{R}$
Ζητείται από τους μαθητές να εξετάσουν αν η συνάρτηση f *έχει ασύμπτωτες.*
Δύο μαθητές Α και Β ισχυρίστηκαν ότι:
Μαθητής Α: «Δεν έχει ασύμπτωτες, αφού η συνάρτηση f *ορίζεται σε όλο το* $\mathbb{R}$*»*
Μαθητής Β: «Δεν έχει ασύμπτωτες, αφού $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ *και* $\lim_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$*»*
Συμφωνείτε με τους ισχυρισμούς των μαθητών Α και Β; Να αιτιολογήσετε πλήρως την απάντηση σας.

(Μονάδες 10)

Λύση. *Οι δύο μαθητές έκαναν λάθος ισχυρισμούς γιατί δεν εξέτασαν την περίπτωση για ύπαρξη πλάγιας ασύμπτωτης.*
Α. Εξετάζουμε για πλάγια ασύμπτωτη για $x\to+\infty$*, όπου* $|x|=x$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}{x}=1=\lambda$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-x\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x^2+x+1}-x)(\sqrt{x^2+x+1}+x)}{\sqrt{x^2+x+1}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+x+1-x^2}{\sqrt{x^2+x+1}+x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{x\left[\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1\right]}=\frac{1}{2}=\beta$$

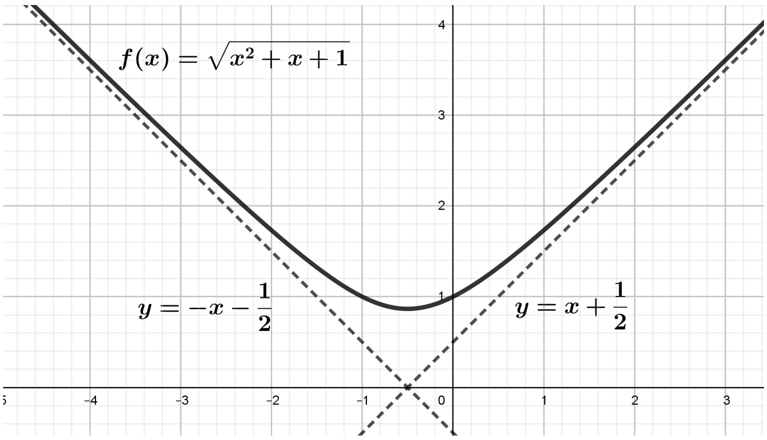
Άρα έχουμε ότι η ευθεία $y=x+\frac{1}{2}$ *είναι πλάγια ασύμπτωτη της καμπύλης στην περιοχή του* $+\infty$
Β. Εξετάζουμε για πλάγια ασύμπτωτη για $x\to-\infty$*, όπου* $|x|=-x$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}{x}=-1=\lambda$$

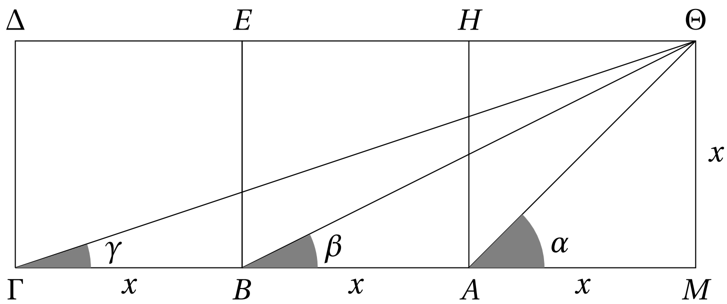
$$\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-\lambda x\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-(-x)\right]=\lim_{x\to-\infty}\frac{(\sqrt{x^2+x+1}+x)(\sqrt{x^2+x+1}-x)}{\sqrt{x^2+x+1}-x}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+x+1-x^2}{\sqrt{x^2+x+1}-x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x+1}{-x\left[\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1\right]} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2} = \beta$$

Άρα έχουμε ότι η ευθεία $y=-x-\frac{1}{2}$ *είναι πλάγια ασύμπτωτη της καμπύλης στην περιοχή του* $-\infty$



Ερώτηση 4. *Στο πιο κάτω σχήμα φαίνονται τρία τετράγωνα πλευράς x.*



Να αποδείξετε με δύο διαφορετικούς τρόπους ότι για τις γωνίες α,β,γ, *ισχύει η σχέση* $\alpha=\beta+\gamma$.

Λύση.

Α. Τριγωνομετρική λύση

εφ$a=\frac{\Theta M}{MA}=1$,   εφ$\beta=\frac{\Theta M}{MB}=\frac{1}{2}$,   εφ$\gamma=\frac{\Theta M}{M\Gamma}=\frac{1}{3}$

$\alpha=\frac{\pi}{4}$ *και* $0<\beta<\frac{\pi}{4}, 0<\gamma<\frac{\pi}{4} \Rightarrow 0<\beta+\gamma<\frac{\pi}{2}$.

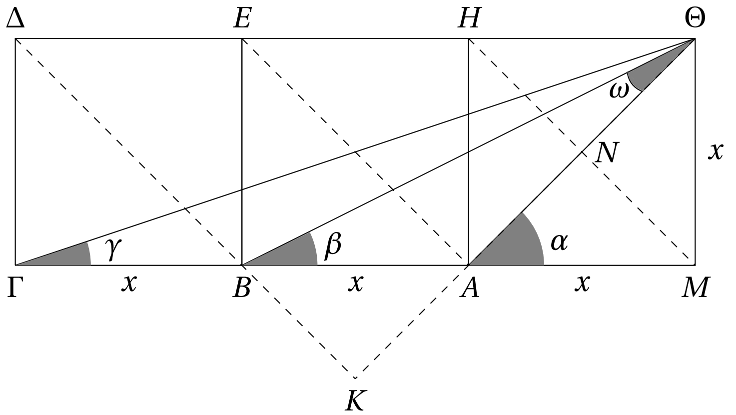
$$\text{εφ}(\beta+\gamma)=\frac{\text{εφ}\beta+\text{εφ}\gamma}{1-\text{εφ}\beta\cdot\text{εφ}\gamma}=\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}=1=\text{εφ}a \Rightarrow a=\beta+\gamma,$$

Β. Γεωμετρική λύση

Οι ευθείες ΘΑ και ΔΒ τέμνονται στο Κ.

Το τρίγωνο $K\Theta\Delta$ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές αφού $\angle B\Delta E = \angle A\Theta H = 45^o$, άρα $\angle \Delta K\Theta = 90^0$.

Επομένως, $K\Delta = K\Theta \Rightarrow KB = KA$, αφού $\Delta B = A\Theta$, ως διαγώνιοι ίσων τετραγώνων.



Οι διαγώνιες ΔB, EA, και HM είναι παράλληλες (σχηματίζουν ίσες εντός και επί τα αυτά γωνίες)
Συνεπώς από το θεώρημα του Θαλή, η $K\Theta$ χωρίζεται σε τρία ίσα τμήματα και $KB = KA = \frac{1}{3}K\Theta$.
Τα τρίγωνα ΓΜΘ και ΒΚΘ είναι όμοια γιατί είναι και τα δύο ορθογώνια και ο λόγος των κάθετων πλευρών τους είναι $\frac{1}{3}$ $\left(\frac{\Theta M}{M\Gamma} = \frac{BK}{K\Theta} = \frac{1}{3}\right)$.
Άρα και οι αντίστοιχες γωνίες τους είναι ίσες, δηλαδή $\gamma = \omega$.
Στο τρίγωνο $BA\Theta$ έχουμε $\beta + \omega = \alpha = 45^0$ (εξωτερική γωνία του τριγώνου $B\Theta A$ ισούται με το άθροισμα των δύο απέναντι εσωτερικών).
Αφού $\gamma = \omega$ προκύπτει ότι $\beta + \gamma = 45^o$ άρα $\beta + \gamma = a$

Ερώτηση 5.

5.1 *Να εξετάσετε αν η πιο κάτω πρόταση είναι αληθής. Να αιτιολογήσετε πλήρως την απάντηση σας.*

> *«Έστω συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα $[\alpha,\beta]$, με $\alpha < \beta$. Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το διάστημα $[\alpha,\beta]$, τότε υποχρεωτικά ισχύει $f'(x) < 0$, σε κάθε εσωτερικό σημείο x του διαστήματος $[\alpha,\beta]$»*

(Μονάδες 3)

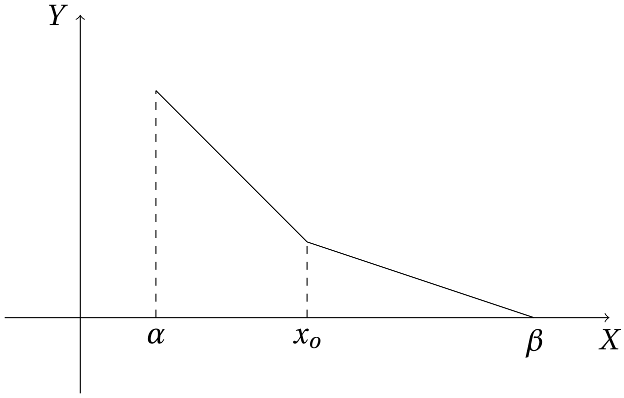
5.2 *Έστω Β το σύνολο όλων των συναρτήσεων $f : [\alpha,\beta] \to \{1,2\}$, οι οποίες είναι συνεχείς και επί. Να υπολογίσετε το πλήθος των στοιχείων του συνόλου Β.*

(Μονάδες 7)

Λύση.

5.1 *Η πρόταση είναι ψευδής.*

Για παράδειγμα, η συνάρτηση που φαίνεται στην παρακάτω γραφική παράσταση είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής σε διάστημα $[\alpha,\beta]$, όμως στο σημείο $x_o \in (\alpha,\beta)$ δεν είναι παραγωγίσιμη.



5.2

Λύση I. *Το σύνολο B είναι κενό.*

Πράγματι, $f([\alpha,\beta]) = [m,M]$, όπου $M = max_{x\in[\alpha,\beta]} f(x)$ και $m = min_{x\in[\alpha,\beta]} f(x)$, ως αποτέλεσμα του «Θεωρήματος της Ενδιαμέσου Τιμής» και της «Αρχής του Μεγίστου και Ελάχιστου».

Δηλαδή η εικόνα ενός διαστήματος μέσω συνεχούς συναρτήσεως είναι διάστημα.

Άρα οι μόνες συνεχείς συναρτήσεις $g : [\alpha,\beta] \to \{1,2\}$ είναι οι σταθερές συναρτήσεις $g(x) = 1$, $x \in [\alpha,\beta]$ και $h(x) = 2$, $x \in [\alpha,\beta]$ που δεν είναι επί.

Λύση II. *Έστω ότι το σύνολο B δεν είναι κενό.*

Τότε υπάρχει συνεχής συνάρτηση $f : [\alpha,\beta] \to \{1,2\}$ πού είναι επί. Άρα υπάρχουν σημεία $x_0, y_0 \in [\alpha,\beta]$ τέτοια ώστε $f(x_0) = 1$, $f(y_0) = 2$ με $x_0 < y_0$, αφού η f είναι συνάρτηση.

Όμως, από το θεώρημα της ενδιάμεσης τιμής για κάθε $t \in (1,2)$ θα πρέπει να υπάρχει $x \in (x_0,y_0)$ τέτοιο ώστε $f(x) = t$. Άρα $f([\alpha,\beta]) \neq \{1,2\}$. Άτοπο.

Λύση III. *Αφού η συνάρτηση είναι συνεχής και επί, από το Θεώρημα των ενδιαμέσων τιμών η συνάρτηση οφείλει να λαμβάνει όλες τις τιμές του διαστήματος [1,2], συγκεκριμένα την τιμή $\frac{3}{2}$, κάτι που δεν συμβαίνει.*

Άρα $B = \emptyset$

Ερώτηση 6. *Έστω $m \geq 1$, φυσικός αριθμός. Να δείξετε ότι αν $\sqrt{m} \notin \mathbb{N}$ (όπου $\mathbb{N}$ το σύνολο των φυσικών αριθμών), τότε ο αριθμός $\sqrt{m}$ είναι άρρητος.*

(Μονάδες 10)

Λύση.

Λύση I. *Έστω ότι ο αριθμός $\sqrt{m}$ είναι ρητός, οπότε θα έχει τη μορφή*

$$\sqrt{m} = \frac{p}{q}$$

όπου p,q ακέραιοι πρώτοι μεταξύ τους. Από τη σχέση αυτή λαμβάνουμε

$$p^2 = mq^2$$

Το p^2 αναλύεται σε γινόμενο πρώτων παραγόντων, όπου οι εκθέτες των δυνάμεων των πρώτων παραγόντων είναι άρτιοι αριθμοί. Όμοια ισχύει και για το q^2. Επειδή ο αριθμός m δεν είναι τετράγωνος, τουλάχιστον ένας πρώτος παράγοντας στην ανάλυση του m θα έχει περιττό εκθέτη. Άρα στην ανάλυση του mq^2 θα υπάρχει πρώτος παράγοντας με εκθέτη περιττό αριθμό (αν αυτός ο παράγοντας εμφανίζεται στην ανάλυση του q^2 θα έχει άρτιο εκθέτη). Αυτό είναι άτοπο αφού $mq^2 = p^2$ και η ανάλυση του p^2 έχει μόνο άρτιους εκθέτες.

Λύση ΙΙ. *Έστω ότι ο αριθμός $\sqrt{m}$ είναι ρητός, οπότε θα έχει τη μορφή*

$$\sqrt{m} = \frac{p}{q}$$

όπου p,q ακέραιοι πρώτοι μεταξύ τους. Από τη σχέση αυτή λαμβάνουμε

$$p^2 = mq^2 \qquad (1)$$

Έστω α ένας πρώτος διαιρέτης του m.
Ισχύει $\alpha \mid p^2$ και κατά συνέπεια $\alpha \mid p$. Έστω α^s η μεγαλύτερη δύναμη του α, η οποία διαιρεί τον p, οπότε θα έχουμε

$$p = \alpha^s c, \qquad \alpha \nmid c.$$

Άρα η σχέση (1) γίνεται

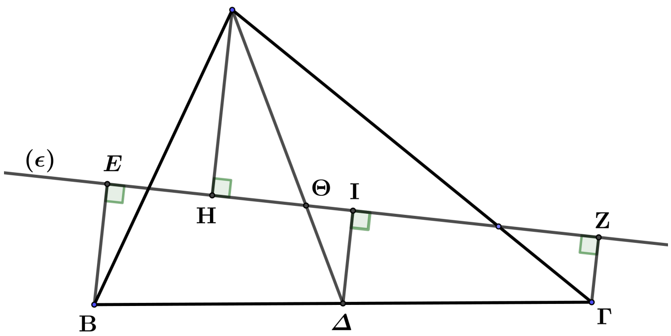
$$\alpha^{2s} c^2 = mq^2$$

Επειδή $\alpha \nmid q$ και $\alpha \nmid c$, προκύπτει, ότι ο m διαιρείται δια του α^{2s} και δεν διαιρείται με μεγαλύτερη δύναμη του α. Επειδή αυτό ισχύει για κάθε πρώτο διαιρέτη του m, προκύπτει, ότι ο m τετραγωνική δύναμη ενός φυσικού αριθμού. Άτοπο.

Ερώτηση 7. *Να αποδείξετε ότι σε κάθε τρίγωνο, η απόσταση της μιας κορυφής του τριγώνου από τυχαία ευθεία που περνά από το κέντρο βάρους του, ισούται με το άθροισμα των αποστάσεων των άλλων δυο κορυφών του τριγώνου από την ίδια ευθεία.*

(Μονάδες 10)

Λύση. *Έστω Θ το κέντρο βάρους του τριγώνου ΑΒΓ τότε Δ μέσο της $B\Gamma$. Τότε ισχύει $\dfrac{A\Theta}{\Theta\Delta} = \dfrac{2}{1}$.*



Φέρνουμε τις προβολές E, H, I, Z των σημείων B, A, Δ και Γ αντίστοιχα, πάνω στην ευθεία (ϵ). Ισχύει ότι $BE \parallel \Delta I \parallel \Gamma Z$, συνεπώς το τετράπλευρο $BEZ\Gamma$ που σχηματίζεται είναι τραπέζιο και από *το θεώρημα του Θαλή το* I *είναι μέσο του* EZ *και συνεπώς* $\Delta I = \dfrac{BE + Z\Gamma}{2}$ (1)

Όμως τα ορθογώνια τρίγωνα $AH\Theta$ *και* $\Theta I\Delta$ *είναι όμοια επειδή,* $\angle A\Theta H = \angle \Delta\Theta I$ *(κατακόρυφηn γωνίες).*

Από την ομοιότητα έχουμε ότι, $\frac{AH}{\Delta Z} = \frac{A\Theta}{\Theta\Delta} = \frac{2}{1}$ (2).

Από (1) και (2) παίρνουμε $AH = BE + Z\Gamma$.

Ερώτηση 8. *Λέμε ότι δύο αριθμοί* $x,y \in [0,2]$ *είναι ισοδύναμοι (και το συμβολίζουμε με* $x \sim y$*) αν και μόνον αν* $x - y$ *είναι ακέραιος αριθμός* $(x - y \in \mathbb{Z})$.

8.1 *Να δείξετε ότι:*

8.1.1 $x \sim x$

8.1.2 *αν* $x \sim y$ *τότε* $y \sim x$

8.1.3 *αν* $x \sim y$ *και* $y \sim z$ *τότε* $x \sim z$

(Μονάδες 3)

8.2 *Για κάθε* $x \in [0,2]$ *το σύνολο* $[x] = \{y \in [0,2] : y \sim x\}$ *περιέχει όλους τους αριθμούς πού είναι ισοδύναμοι με το* x. *Να αναγράψετε τα στοιχεία του* $[x]$.

(Μονάδες 4)

8.3 *Να δείξετε ότι* $[x] \cap [y] = \emptyset$ *αν και μόνον αν το* x *δεν είναι ισοδύναμο με το* y $(x \not\sim y)$. *(Μονάδες 3)*

Λύση.

8.1.1 $x \sim x \Leftrightarrow x - x = 0 \in \mathbb{Z}$, *ισχύει.*

8.1.2 *Αν* $x \sim y$ *τότε* $x - y \in \mathbb{Z}$ *άρα* $y - x = -(x - y) \in \mathbb{Z}$ *δηλαδή* $y \sim x$.

8.1.3 *Αν* $x \sim y$ *και* $y \sim z$ *τότε* $x - y \in \mathbb{Z}$ *και* $y - z \in \mathbb{Z}$.

Προσθέτοντας τις δύο τελευταίες σχέσεις έχουμε $x - z \in \mathbb{Z}$ *επομένως* $x \sim z$.

8.2

$$[x] = \begin{cases} \{0,1,2\}, & \text{αν} \quad x \in \{0,1,2\} \\ \{x, x+1\}, & \text{αν} \quad x \in (0,1) \\ \{x, x-1\}, & \text{αν} \quad x \in (1,2) \end{cases}$$

8.3

Λύση I

Έστω ότι $[x] \cap [y] = \emptyset$. *Υποθέτουμε ότι* $x \sim y$, *τότε* $[x] = [y]$. *Άτοπο, άρα* $x \not\sim y$.

Αντίστροφα,

Έστω ότι $x \not\sim y$. *Αν* $[x] \cap [y] \neq \emptyset$, *τότε υπάρχει* $z \in [x]$ *και* $z \in [y]$. *Άρα το* $z \sim x$ *και* $z \sim y$.

Συνεπώς, $x \sim y$. *Άτοπο*

Λύση II

Έστω $[x] \cap [y] = \emptyset$ *και* $x \sim y$.

Τότε $x,y \in [x]$ *και* $x,y \in [y]$. *Άρα* $x,y \in [x] \cap [y]$, *δηλαδή* $[x] \cap [y] \neq \emptyset$, *άτοπο.*

Αντίστροφα,

Έστω $x \nsim y$ και $[x] \cap [y] \neq \emptyset$. Τότε υπάρχει $z \in [0,2]$ με $z \in [x] \cap [y] \Rightarrow z \in [x]$ και $z \in [y]$

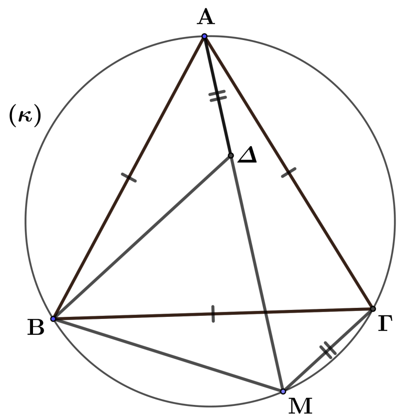
Άρα, $(z \sim x$ και $z \sim y) \Rightarrow (x \sim z$ και $z \sim y) \Longrightarrow x \sim y$, άτοπο.

Ερώτηση 9. *Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ και ο περιγεγραμμένος κύκλος του (κ). Έστω Μ σημείο του μικρού κυκλικού τόξου ΒΓ, διαφορετικό από τις κορυφές Β και Γ του τριγώνου.*
Να δείξετε ότι ΜΒ + ΜΓ = ΜΑ.

(Μονάδες 10)

Λύση.

Λύση Ι *Στο εσωτερικό του ευθύγραμμου τμήματος AM παίρνουμε σημείο Δ τέτοιο ώστε $A\Delta = M\Gamma$ το οποίο υπάρχει αφού $M\Gamma < B\Gamma < AM$, (προκύπτει από την σύγκριση των αντιστοίχων τόξων).*



Τα τρίγωνα $MB\Gamma$ και ΔAB είναι ίσα αφού έχουν $B\Gamma = AB$ (πλευρές ισοπλεύρου, δεδομένο), $M\Gamma = A\Delta$ (εκ κατασκευής) και ∠ΒΑΔ= ∠ΒΓΜ (βαίνουν στο ίδιο τόξο ΒΜ).
Επομένως $\Delta B = MB$. Όμως $\angle BMA$= $\angle B\Gamma A$ (βαίνουν στο τόξο $\overset{\frown}{AB} = 60^o$).
Άρα $\angle BMA = 60^o$.
Άρα το τρίγωνο$M\Delta B$ είναι ισόπλευρο, συνεπώς $\Delta M = MB$ και $M\Gamma + MB = A\Delta + \Delta M = AM$.

Λύση ΙΙ

Εφαρμόζομε τον νόμο των συνημιτόνων.

$(A\overset{\triangle}{B}M): \quad (AB)^2 = (BM)^2 + (AM)^2 - 2(BM)(AM)\cdot συν60^o \quad (1)$

$(B\overset{\triangle}{M}\Gamma): \quad (B\Gamma)^2 = (MB)^2 + (M\Gamma)^2 - 2(BM)(M\Gamma)\cdot συν120^o \quad (2)$

$AB = A\Gamma = B\Gamma$ *(ΑΒΓ ισόπλευρο τρίγωνο)*

Αφαιρώντας τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε,

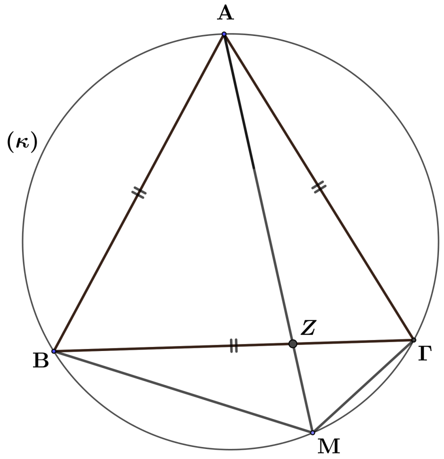
(1)-(2) $\Rightarrow (AB)^2 - (B\Gamma)^2 = (AM)^2 - (M\Gamma)^2 - (BM)(MA) - (BM)(M\Gamma) \Rightarrow$

$0 = [(AM) - (M\Gamma)][(AM) + (M\Gamma)] - (MB)[(AM) + (M\Gamma)] \Rightarrow$

$0 = [(AM) + (M\Gamma)][(AM) - (M\Gamma) - (MB)]$ *Επειδή* $(AM) + (M\Gamma) > 0$

Τότε, $(AM) = (BM) + (M\Gamma)$

Λύση ΙΙΙ



Ισχύει ότι: $\angle BMA = \angle \Gamma MA = 60^o$ (βαίνουν σε ίσα τόξα 120^o).
Άρα η ευθεία MZ είναι διχοτόμος της γωνίας $\angle BM\Gamma$ του τριγώνου $BM\Gamma$.

Σύμφωνα με το θεώρημα των διχοτόμων στο τρίγωνο $BM\Gamma$ έχουμε ότι:

$$\frac{BZ}{MB} = \frac{Z\Gamma}{M\Gamma} = \frac{BZ+Z\Gamma}{MB+M\Gamma} = \frac{B\Gamma}{MB+M\Gamma} \Longrightarrow \frac{BZ}{MB} = \frac{B\Gamma}{MB+M\Gamma} \qquad (1)$$

Εξετάζω ως προς την ομοιότητα τα τρίγωνα $\overset{\triangle}{ABZ}$ και $\overset{\triangle}{AMB}$

$$\left.\begin{array}{l} \angle BAZ = \angle BAM \quad \text{(κοινή γωνιά)} \\ \angle AB\Gamma = \angle AMB \quad \text{(βαίνουν σε ίσα τόξα)} \end{array}\right\} \Longrightarrow \overset{\triangle}{ABZ} \approx \overset{\triangle}{AMB} \Longrightarrow \frac{AB}{AM} = \frac{BZ}{MB} \qquad (2)$$

Άρα από τις (1) και (2) έχουμε ότι $\dfrac{AB}{AM} = \dfrac{B\Gamma}{MB+M\Gamma} \overset{AB=B\Gamma}{\Longrightarrow} MB + M\Gamma = MA.$

Ερώτηση 10.

10.1 *Θεωρείστε τις ακολουθίες πραγματικών αριθμών $\{a_\nu\}$ και $\{\beta_\nu\}$, για τις οποίες ισχύει ότι,*

$$\lim_{\nu\to\infty} \beta_\nu = \alpha,\ \alpha \in \mathbb{R} \quad \text{και} \lim_{\nu\to\infty} \frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu} = 1$$

Να δείξετε ότι $\lim\limits_{\nu\to\infty} a_\nu = \alpha$

(Μονάδες 4)

10.2 *Να βρείτε τα παρακάτω όρια:*

10.2.1 $\lim\limits_{\nu\to+\infty} \nu \cdot \ln\left(1+\dfrac{1}{\nu}\right), \quad \nu \in \mathbb{N}$ *(Μονάδες 2)*

10.2.2 $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\eta\mu 2x}{x}, \quad x \in (0,+\infty)$ *(Μονάδες 2)*

10.2.3 $\lim\limits_{\nu\to+\infty} \sqrt[\nu]{2^\nu + 4^\nu + 6^\nu}, \quad \nu \in \mathbb{N}$ *(Μονάδες 2)*

Λύση.

10.1

Για $\gamma_\nu = \frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu}$ *έχουμε* $\lim\limits_{\nu\to+\infty}\gamma_\nu = 1$.

Επομένως, το πηλίκο $\frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu}$ *είναι πεπερασμένος αριθμός,* $\forall \nu \geq \nu_0$.

Δηλαδή $\beta_\nu \neq 0$, $\forall \nu \geq \nu_0$. *Άρα,* $\alpha_\nu = \beta_\nu \cdot \frac{\alpha_\nu}{\beta_\nu} = \beta_\nu \cdot \gamma_\nu \ \forall \nu \geq \nu_0$.

Άρα, $\lim\limits_{\nu\to+\infty} a_\nu = \lim\limits_{\nu\to+\infty}\beta_\nu\gamma_\nu = \lim\limits_{\nu\to+\infty}\beta_\nu \cdot \lim\limits_{\nu\to+\infty}\gamma_\nu = \alpha \cdot 1 = \alpha$

10.2.1

Η συνάρτηση $\ln(1+x)$ *είναι συνεχής στο διάστημα* $(0,+\infty)$.

Επομένως,

$$\lim_{\nu\to+\infty}\nu\ln\left(1+\frac{1}{\nu}\right) = \lim_{\nu\to+\infty}\ln\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^\nu = \ln\lim_{\nu\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^\nu = \ln e = 1$$

10.2.2

Ισχύει $-1 \leq \eta\mu 2x \leq 1 \Rightarrow -\frac{1}{x} \leq \frac{\eta\mu 2x}{x} \leq \frac{1}{x}$, $x \in (0,+\infty)$ *με* $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x} = 0$

Συνεπώς από το θεώρημα της παρεμβολής $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\eta\mu 2x}{x} = 0$

10.2.3

Έχουμε $6 = \sqrt[\nu]{6^\nu} < \sqrt[\nu]{2^\nu + 4^\nu + 6^\nu} < \sqrt[\nu]{6^\nu + 6^\nu + 6^\nu} = \sqrt[\nu]{3\cdot 6^\nu} = 6\sqrt[\nu]{3}$.

Όμως $\lim\limits_{\nu\to+\infty}\sqrt[\nu]{3} = 1$ *και συνεπώς* $\lim\limits_{\nu\to+\infty} 6\cdot\sqrt[\nu]{3} = 6$

Επομένως από το θεώρημα της παρεμβολής έχουμε ότι $\lim\limits_{\nu\to+\infty}\sqrt[\nu]{2^\nu + 4^\nu + 6^\nu} = 6$.

ΤΕΛΟΣ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟΥ ΔΟΚΙΜΙΟΥ