ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ
ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

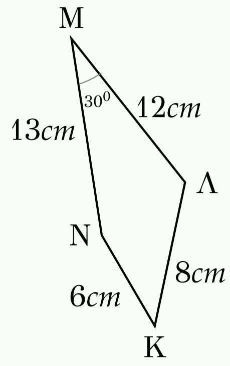
ΓΡΑΠΤΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΓΙΑ ΕΓΓΡΑΦΗ ΚΑΙ ΚΑΤΑΤΑΞΗ ΣΤΟΥΣ ΠΙΝΑΚΕΣ ΔΙΟΡΙΣΙΜΩΝ

Γνωστικό Αντικείμενο: Μαθηματικά
Ημερομηνία εξέτασης: 8 Νοεμβρίου 2017

ΛΥΣΕΙΣ ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΟΥ ΔΟΚΙΜΙΟΥ

Ερώτηση 1. Να επιλέξετε ποιες από τις ακόλουθες έξι (6) δραστηριότητες και με ποια σειρά θα τις εφαρμόσετε, για να υπολογίσετε το εμβαδόν του πιο κάτω σχήματος, σύμφωνα με τα δεδομένα που παρουσιάζονται σε αυτό. **(Μονάδες 10)**

(1) Εφαρμογή του νόμου ημιτόνων
(2) Εφαρμογή του νόμου συνημιτόνων
(3) Εφαρμογή του Πυθαγόρειου θεωρήματος
(4) Κατασκευή της διαγωνίου του τετράπλευρου
(5) Υπολογισμός του εμβαδού τριγώνου
με τον τύπο $E = \frac{1}{2}\alpha \cdot \beta \cdot \eta\mu\Gamma$
(6) Υπολογισμός του εμβαδού τριγώνου με
τον τύπο $E = \frac{\beta \cdot \upsilon}{2}$



Επιλέξτε την ορθή απάντηση και γράψτε την στο Τετράδιο Απαντήσεων.

Α. 4 - 2 - 5 **Β.** 4 - 3 - 6 **Γ.** 4 - 2 - 1 - 5 **Δ.** 4 - 1 - 2 - 5

Απάντηση Ερώτησης 1

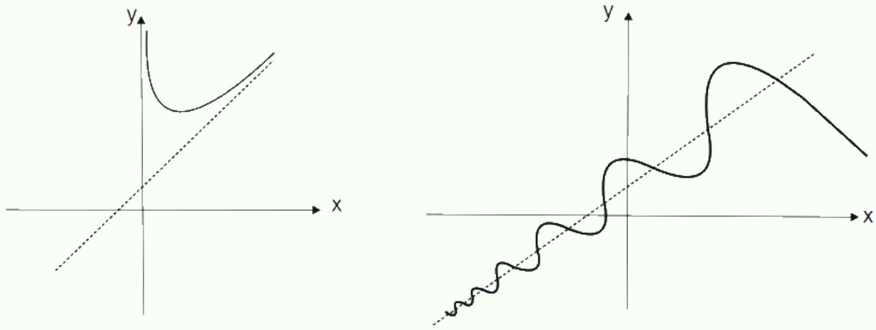
Α. 4 - 2 - 5

Ερώτηση 2. Ένας καθηγητής διδάσκει τον ορισμό της πλάγιας ασύμπτωτης μιας συνάρτησης f, που περιέχει στο πεδίο ορισμού της διάστημα $(d, +\infty)$, με τη χρήση του ορίου

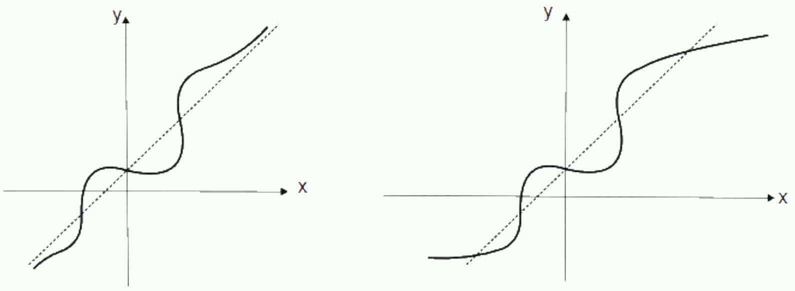
$$\lim_{x\to\infty} [f(x) - (ax + \beta)] = 0, \;\; a \neq 0.$$

2.1 Ποια από τις ακόλουθες ομάδες σχημάτων αντιστοιχεί στην ουσία του ορισμού; Επιλέξτε την ορθή απάντηση και γράψτε την στο Τετράδιο Απαντήσεων. (Μονάδες 5)

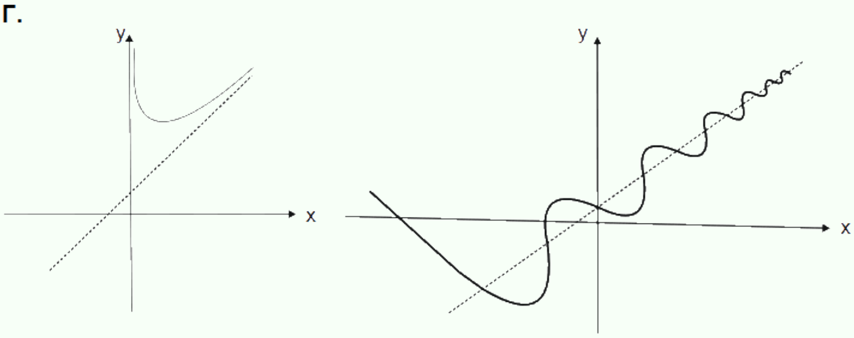
A.



B.



Γ.



Δ. Κανένα από τα πιο πάνω.

2.2 Τεκμηριώστε την επιλογή σας. (Μονάδες 5)

Απάντηση Ερώτησης 2

2.1 Απάντηση: Γ

2.2 Υπακούει στον ορισμό της πλάγιας ασύμπτωτης.

Όταν το x τείνει στο άπειρο, τότε η απόσταση των τιμών της συνάρτησης από την ασύμπτωτη τείνει στο μηδέν.

(Δεν αποκλείεται η περίπτωση η γραφική παράσταση να τέμνει την ευθεία της ασυμπτώτου άπειρες φορές νοουμένου ότι η απόσταση τείνει στο μηδέν).

Ερώτηση 3. **Να δείξετε ότι στη σύνθεση δύο συναρτήσεων δεν ισχύει πάντα η αντιμεταθετική ιδιότητα.** **(Μονάδες 10)**

Απάντηση Ερώτησης 3

Λύση με την χρήση «Αντιπαραδείγματος»

Παράδειγμα όπου δίνονται, τύπος συνάρτησης, πεδίο ορισμού και πεδίο τιμών για συναρτήσεις f και g. Δηλαδή θεωρούμε ότι, $y = f(x)$, $y = g(x)$ όπου $f : A \to B$ και $g : \Gamma \to \Delta$.

Έλεγχος αν ορίζεται η σύνθεση fog και gof [πεδίο ορισμού, πεδίο τιμών των συνθέσεων] για τις συναρτήσεις που δόθηκαν.

Ελέγχεται ότι για τις συναρτήσεις που έχουν επιλεγεί ισχύει: $fog \neq gof$

Ερώτηση 4. Ένας καθηγητής ζήτησε από τους μαθητές του, αφού εξετάσουν την συνάρτηση

$$f(x) = |x^2 + |x| - 2|, \quad x \in \mathbb{R},$$

να απαντήσουν στο ερώτημα: *«Σε πόσα σημεία η συνάρτηση f δεν είναι παραγωγίσιμη;»*

Ο Μαθητής Α απάντησε: *«Η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη σε όλο το πεδίο ορισμού της.»*

Ο Μαθητής Β απάντησε: *«Η συνάρτηση δεν είναι παραγωγίσιμη σε τρία σημεία.»*

Ο Μαθητής Γ απάντησε: *«Η συνάρτηση δεν είναι παραγωγίσιμη σε τέσσερα σημεία.»*

4.1 Ποιος από τους τρεις μαθητές έδωσε την ορθή απάντηση και γιατί; **(Μονάδες 7)**

4.2 Πού πρέπει να αποδώσει ο καθηγητής τις λανθασμένες απαντήσεις των άλλων δύο μαθητών; **(Μονάδες 3)**

Απάντηση Ερώτησης 4

4.1 Μαθητής Β.

Παρατηρούμε ότι $f(-x) = f(x)$, συνεπώς το γράφημα της συνάρτησης f είναι συμμετρικό ως προς τον άξονα των y.

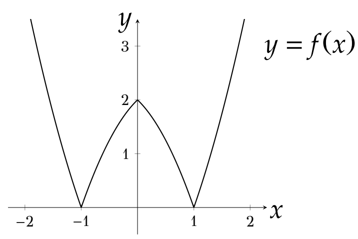
$f(x) = |x^2 + |x| - 2|$

Για $x \geq 0$ θεωρώ την $y = x^2 + x - 2 = (x+2)\cdot(x-1)$,

Όταν $y = 0$ $\quad x = -2, \quad x = 1$

Για $0 \leq x < 1$, $y = -x^2 - x + 2$

$$\text{Συνεπώς } y = f(x) = \begin{cases} x^2 - x - 2 & , \quad x < -1 \\ -x^2 + x + 2 & , \quad -1 \leq x < 0 \\ -x^2 - x + 2 & , \quad 0 \leq x < 1 \\ x^2 + x - 2 & , \quad x \geq 1 \end{cases}$$



Για να κάνω το γράφημα της $f(x) = |x^2 + |x| - 2|$ όταν $x \leq 0$ παίρνω το συμμετρικό του γραφήματος για $x \geq 0$ ως προς τον άξονα των y.

Το γράφημα της $f(x) = |x^2 + |x| - 2|$ παρουσιάζει 3 γωνιακά σημεία. Αυτό προκύπτει ως εξής:

(α)

$$\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{x^2+x-2}{x-1}=3$$
$$\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{-x^2-x+2}{x-1}=-3$$

Η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x=1$.

(β)

$$\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^+}\frac{-x^2-x+2-2}{x}=-1$$
$$\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^-}\frac{-x^2+x+2-2}{x}=1$$

Η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x=0$

(γ)

$$\lim_{x\to-1^+}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim_{x\to-1^+}\frac{-x^2+x-2}{x+1}=3$$
$$\lim_{x\to-1^-}\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}=\lim_{x\to1^-}\frac{x^2-x-2}{x+1}=-3$$

Η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x=-1$

4.2

Μαθητής Α:

(α) Δεν έχει κατανοήσει την πιθανή ύπαρξη γωνιακών σημείων στις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων με απόλυτες τιμές.

(β) Δεν έχει κατανοήσει ότι δεν υπάρχει παράγωγος μιας συνάρτησης στα σημεία όπου η γραφική της παράσταση παρουσιάζει «γωνίες».

Μαθητής Γ:

Δεν έχει κατανοήσει ότι η ανάκλαση του γραφήματος της συνάρτησης ως προς τον άξονα των τεταγμένων αφήνει σταθερά τα σημεία του γραφήματος που ανήκουν στον άξονα δημιουργώντας πιθανές «γωνίες» στην γραφική της παράσταση.

Ερώτηση 5. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΒΓ$ ($Α = 90°$) και σημείο $Δ$ στο εσωτερικό του ευθυγράμμου τμήματος $ΑΓ$. Στο σημείο $Δ$ φέρουμε την ευθεία (ϵ) κάθετη στο $ΑΓ$.

5.1 Να περιγράφετε την κατασκευή με κανόνα και διαβήτη σημείου $Μ$ της ευθείας (ϵ), τέτοιο ώστε $ΒΓ = ΓΜ$, με την απαραίτητη αιτιολόγηση.

(Μονάδες 4)

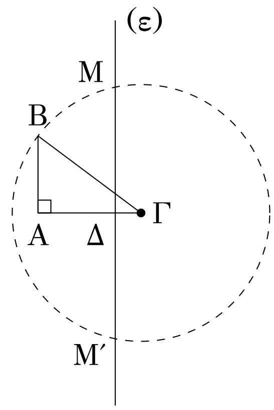
5.2 Να εξετάσετε αν το σημείο $Μ$ είναι μοναδικό. **(Μονάδες 2)**

5.3 Να εξετάσετε αν η απαίτηση το σημείο $Δ$ να ανήκει στο εσωτερικό του ευθύγραμμου τμήματος $ΑΓ$ (και όχι στην ευθεία που ορίζεται από τα σημεία $Α$ και $Γ$) είναι απαραίτητη για την ύπαρξη σημείου $Μ$ με την παραπάνω ιδιότητα.

(Μονάδες 4)

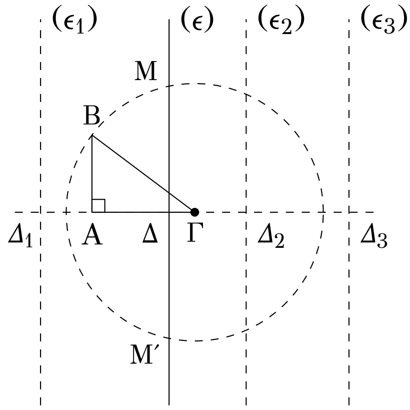
Απάντηση Ερώτησης 5

5.1 Κατασκευάζουμε τον κύκλο με κέντρο $Γ$ και ακτίνα $ΒΓ$ που τέμνει την ευθεία (ϵ) σε δύο σημεία $Μ$ και $Μ'$ εκατέρωθεν του $Δ$. Ισχύει ότι $ΓΜ = ΓΜ' = ΒΓ$ επειδή είναι ακτίνες του ίδιου κύκλου.



5.2 Το σημείο $Δ$ είναι εσωτερικό σημείο του κύκλου και επομένως κάθε ευθεία που διέρχεται από το σημείο $Δ$ τέμνει τον κύκλο σε δύο σημεία. Ἀρα το σημείο $Μ$ δεν είναι μοναδικό.

5.3 Για να υπάρχει σημείο $Μ$ της (ϵ) με την ιδιότητα αυτή θα πρέπει το $Δ$ να ανήκει στην ευθεία (δ) που φέρει το τμήμα $ΑΓ$.



Πιο συγκεκριμένα, αν $ΓΔ < ΓΒ$ τότε έχουμε ξανά δύο σημεία τομής του κύκλου και της (ϵ). Αν $ΓΔ = ΒΓ$, τότε ο κύκλος εφάπτεται της (ϵ) στο $Δ$ ($Μ$ μοναδικό).

Τέλος αν $ΓΔ > ΒΓ$ τότε ο κύκλος που φέρουμε δεν τέμνει την ευθεία (ϵ), περιπτώσεις (ϵ_1) και (ϵ_3). Από τα πιο πάνω φαίνεται πως δεν είναι απαραίτητο το $Δ$ να είναι εσωτερικό σημείο ευθυγράμμου τμήματος ευθείας $ΑΓ$.

Είναι όμως απαραίτητο να ισχύει $ΓΔ \leq ΓΒ$.

Ερώτηση 6. Να δείξετε ότι οι αριθμοί $2^\nu - 1$ και $2^\nu + 1$ δεν μπορούν να είναι συγχρόνως πρώτοι αριθμοί, οποιοσδήποτε και αν είναι ο φυσικός αριθμός ν, με $\nu > 2$. **(Μονάδες 10)**

Απάντηση Ερώτησης 6

Α΄ τρόπος: Οι $2^\nu - 1, 2^\nu, 2^\nu + 1$ είναι τρεις διαδοχικοί αριθμοί. Μόνο ένας από αυτούς διαιρείται με το 3.
Ο άρτιος αριθμός 2^ν δεν διαιρείται με το 3 με χρήση της μοναδικότητας ανάλυσης σε γινόμενο πρώτων παραγόντων. Έτσι πρέπει να διαιρείται με το 3 είτε ο αριθμός $2^\nu - 1$ είτε ο αριθμός $2^\nu + 1$. Άρα δεν μπορεί να είναι και οι δύο ταυτόχρονα πρώτοι.

Β΄ τρόπος: Υπάρχουν τρία δυνατά αποτελέσματα στην διαίρεση του $2^\nu - 1$ με το 3 $(\nu > 2)$.

Άρα έχουμε τις περιπτώσεις:
(α) $2^\nu - 1 = 3\kappa, \ \kappa \in \mathbb{N}$, στην περίπτωση αυτή $3|2^\nu - 1$, συνεπώς ο αριθμός $2^\nu - 1$ δεν είναι πρώτος.

(β) $2^\nu - 1 = 3\kappa + 1, \ \kappa \in \mathbb{N} \Rightarrow 2^\nu + 1 = 3\kappa + 3$ και στην περίπτωση αυτή $3|2^\nu + 1$, συνεπώς ο αριθμός $2^\nu + 1$ δεν είναι πρώτος.

(γ) $2^\nu - 1 = 3\kappa + 2, \kappa \in \mathbb{N} \ \Rightarrow 2^\nu + 1 = 3(\kappa + 1) + 1 \Rightarrow 3|2^\nu$. *Άτοπο.*
Άρα ο αριθμός $2^\nu - 1$ όταν διαιρεθεί με το 3 δεν μπορεί να δώσει υπόλοιπο 2.

Επομένως έχουμε μόνο τις περιπτώσεις (α) και (β).
Αν ισχύει η (α) τότε ο $2^\nu - 1$ δεν είναι πρώτος.
Αν ισχύει η (β) τότε ο $2^\nu + 1 = 3(\nu + 1)$, άρα δεν είναι πρώτος.

Ερώτηση 7.

7.1 Να δώσετε τον ορισμό του ορίου $\lim\limits_{\nu\to\infty} a_\nu$, ακολουθίας (a_ν), $\nu \in \mathbb{N}$. (Μονάδες 2)

7.2 Να δείξετε ότι $\lim\limits_{\nu\to\infty} \frac{1}{\nu} = 0$, $\nu \in \mathbb{N}$. (Μονάδες 2)

7.3 Να εξετάσετε αν συγκλίνει η ακολουθία $a_\nu = (-1)^\nu$, $\nu \in \mathbb{N}$. (Μονάδες 3)

7.4 Σε διαγώνισμα της Β΄ Λυκείου, δύο μαθητές έχουν υπολογίσει το όριο μιας ακολουθίας (a_ν). Ο μαθητής Α έχει υπολογίσει ως όριο το 1 και ο μαθητής Β το $0,999$. Και οι δύο μαθητές ισχυρίζονται ότι έχουν βρει το σωστό αποτέλεσμα. Θεωρείτε ότι αυτό είναι δυνατόν; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 3)

Απάντηση Ερώτησης 7

7.1 Ορισμός ορίου:

$\lim_{\nu\to\infty} a_\nu = \lambda$ αν $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \nu_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} : |a_\nu - \lambda| < \varepsilon$, $\forall \nu > \nu_0$ ή

$\lim_{\nu\to\infty} a_\nu = \lambda$ αν και μόνο αν $\forall \varepsilon > 0, \exists \nu_0 = \nu_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \nu > \nu_0 \Rightarrow |a_\nu - \lambda| < \varepsilon$.

7.2 Θα δείξουμε ότι $\lim_{\nu\to\infty} a_\nu = 0$ με $a_\nu = \frac{1}{\nu}$.

Έστω $\varepsilon > 0$ τότε, $\exists \nu_0 = \nu(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, τέτοιο ώστε $\nu_0 \cdot \varepsilon > 1$ (Αρχιμήδεια ιδιότητα των πραγματικών αριθμών). Συνεπώς αν $\nu > \nu_0 \Rightarrow \nu \cdot \varepsilon > \nu_0 \cdot \varepsilon > 1$. Άρα αν $\nu > \nu_0 \Rightarrow |\frac{1}{\nu}| < \varepsilon$.

7.3 Έστω ότι $\lim_{\nu\to\infty} a_\nu = a$. Τότε, από τον ορισμό, για $\varepsilon = \frac{1}{2}$, έχουμε:

$\exists \nu_0(\varepsilon) : \nu > \nu_0 \Rightarrow |a_\nu - a| < \frac{1}{2}$.

Τώρα: $2\nu_0 > \nu_0 \Rightarrow |a_{2\nu_0} - a| < \frac{1}{2} \Rightarrow |1 - a| < \frac{1}{2}$

και $2\nu_0 + 1 > \nu_0 \Rightarrow |a_{2\nu_0+1} - a| < \frac{1}{2} \Rightarrow |(-1) - a| < \frac{1}{2}$

Η πρώτη ανισότητα δίνει $a \in (\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ και η δεύτερη δίνει $a \in (-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$. *Άτοπο.*

Διαφορετικά.

Η ακολουθία δεν συγκλίνει γιατί αν συνέκλινε τότε όλες οι υπακολουθίες θα συγκλίνουν στο ίδιο με αυτήν όριο. Όμως, $a_{2\nu} \longrightarrow 1$, $a_{2\nu+1} \longrightarrow -1$.

7.4 Δεν είναι δυνατόν, αφού σύμφωνα με θεώρημα της μοναδικότητας του ορίου αν υπάρχει το όριο είναι μοναδικό.

Πράγματι έστω ότι $\lim_{\nu\to\infty} a_\nu = a$ και $\lim_{\nu\to\infty} a_\nu = \beta$.

Από τον ορισμό έχουμε:

Για κάθε $\varepsilon > 0$, $\exists \nu_1 = \nu_1(\varepsilon) : \nu > \nu_1 \Rightarrow |a_\nu - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ και $\exists \nu_2 = \nu_2(\varepsilon) : \nu > \nu_2 \Rightarrow |a_\nu - \beta| < \frac{\varepsilon}{2}$

Συνεπώς αν $\nu > max(\nu_1, \nu_2)$ έχουμε $|a - \beta| \le |a_\nu - a| + |a_\nu - \beta| < \varepsilon$,

Αν $a \ne \beta$, τότε με $\varepsilon = \frac{|a-\beta|}{2} > 0$, ισχύει $|a - \beta| < \frac{|a-\beta|}{2}$. *Άτοπο.*

Ερώτηση 8. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $ΑΒΓ$. Από εσωτερικό σημείο $Μ$ του τριγώνου φέρουμε ευθύγραμμα τμήματα κάθετα προς τις πλευρές του τριγώνου.

8.1 Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των τριών καθέτων ευθυγράμμων τμημάτων είναι σταθερό, ανεξάρτητα της θέσης του $Μ$. (Μονάδες 7)

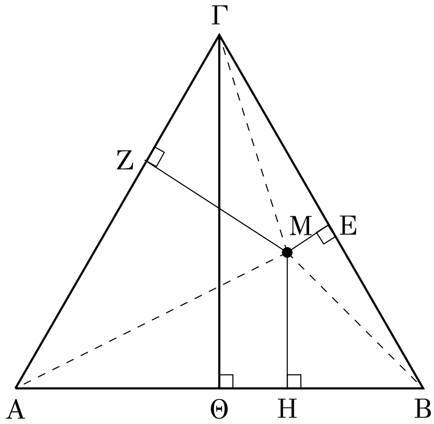
8.2 Να αναφέρετε δύο δυσκολίες που μπορεί να αντιμετωπίσουν οι μαθητές κατά την επίλυση της άσκησης. (Μονάδες 3)

Απάντηση Ερώτησης 8

8.1

Α΄ τρόπος:

Θεωρούμε ισόπλευρο τρίγωνο $ΑΒΓ$.
Από τυχαίο εσωτερικό του σημείο $Μ$ φέρω τα ύψη $ΜΕ$, $ΜΖ$ και $ΜΗ$, καθώς και τα ευθύγραμμα τμήματα προς τις κορυφές $ΜΑ$, $ΜΒ$ και $ΜΓ$.
Φέρω επίσης το ύψος $ΓΘ$.



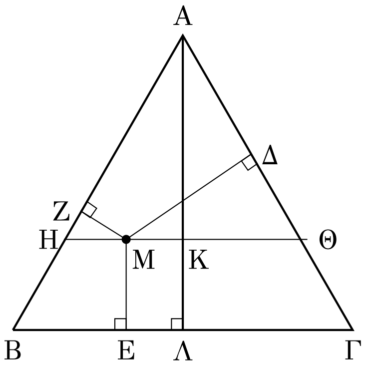
$$E_{ΑΒΓ} = E_{ΑΜΒ} + E_{ΑΜΓ} + E_{ΒΜΓ} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} \cdot ΓΘ \cdot ΑΒ = \frac{1}{2} \cdot ΜΗ \cdot ΑΒ + \frac{1}{2} \cdot ΜΖ \cdot ΑΓ + \frac{1}{2} \cdot ΜΕ \cdot ΒΓ \Rightarrow$$

$$ΓΘ = ΜΗ + ΜΖ + ΜΕ$$

Το άθροισμα των τριών αποστάσεων ίσο με το ύψος του τριγώνου, σταθερό.

Β΄ τρόπος:



Φέρω την ευθεία $Η Θ \parallel ΒΓ$ που διέρχεται από το σημείο $Μ$ και το ύψος $ΑΛ$.
$ΑΒΓ$ ισόπλευρο, $\hat{H} = \hat{B} = \hat{\Theta} = \hat{\Gamma} = 60°$
$ΜΖΗ$, $ΜΘΔ$ ορθογώνια
$ΜΖΗ$ ορθογώνιο: $\hat{H} = 60°, \hat{Z} = 90° \Rightarrow \hat{M} = 30°$
$ΜΘΔ$ ορθογώνιο: $\hat{\Theta} = 60°, \hat{\Delta} = 90° \Rightarrow \hat{M} = 30°$
με $ΖΗ = x \Rightarrow ΗΜ = 2x$ και $ΔΘ = y \Rightarrow ΜΘ = 2y$

$ημ\hat{H} = \frac{ZM}{HM} \Rightarrow ZM = x\sqrt{3}$, $\quad ημ\hat{\Theta} = \frac{\Delta M}{\Theta M} \Rightarrow \Delta M = y\sqrt{3}$,

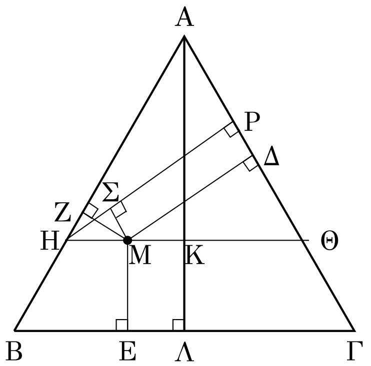
$$MZ + M\Delta = (x+y)\sqrt{3} \qquad (1)$$

$ΑΗΘ$ ισόπλευρο, πλευράς $2x + 2y$, με ΑΚ ύψος του.

$$ημ\hat{H} = \frac{AK}{HA} \Rightarrow AK = (x+y)\sqrt{3} \qquad (2)$$

Από τις (1) και (2), $ΑΚ = ΜΖ + ΜΔ$ και $ΚΛ = ΜΕ$
$ΜΖ + ΜΕ + ΜΔ = ΑΚ + ΚΛ = ΑΛ$, και το ύψος $ΑΛ$ του ισόπλευρου τριγώνου $ΑΒΓ$ είναι σταθερό.

Γ΄ τρόπος:



Φέρω την ευθεία $ΗΘ \parallel ΒΓ$ και το ύψος $ΑΛ$.
$ΑΒΓ$, $ΑΗΘ$ ισόπλευρα τρίγωνα, $\hat{H} = \hat{B} = \hat{\Theta} = \hat{\Gamma} = 60°$.
Φέρω το ύψος $ΗΡ$ του τριγώνου $ΑΗΘ$ που είναι και διχοτόμος και από το $Μ$ κάθετο ευθύγραμμο τμήμα $ΜΣ$.
Τα τρίγωνα $ΜΗΣ = ΜΖΗ$, $\hat{Z} = \hat{\Sigma} = 90°$, $ΜΗ$ κοινή πλευρά,
$Μ\hat{H}Ζ = 60° = Η\hat{M}Σ$.

$ΣΡΔΜ$ ορθογώνιο γιατί $\hat{P} = \hat{\Delta} = \hat{\Sigma} = 90°$. Άρα $ΣΡ = ΜΔ$.
Το $ΜΕΛΚ$ είναι ορθογώνιο, αφού έχει τρεις ορθές γωνίες, συνεπώς $ΚΛ = ΜΕ$.
Το ύψος $ΗΡ = ΗΣ + ΣΡ = ΑΚ$ (Ύψη ισοπλεύρου τριγώνου $ΑΗΘ$).
Το ύψος $ΑΛ = ΑΚ + ΚΛ = ΗΣ + ΣΡ + ΜΕ = ΜΖ + ΜΔ + ΜΕ$
Το άθροισμα των τριών αποστάσεων είναι ίσο με το ύψος του ισοπλεύρου τριγώνου $ΑΒΓ$, που είναι σταθερό.

8.2
α) Κατασκευή του σχήματος
β) Η έννοια του «σταθερού», δηλαδή η δυσκολία για ένα μαθητή να αντιληφθεί ότι το άθροισμα τριών ευθυγράμμων τμημάτων παραμένει το ίδιο, ανεξάρτητα της θέσης του $Μ$.
γ) Σχετίζεται με την μερολογική προσέγγιση στην κατανόηση ενός γεωμετρικού σχήματος. Δηλαδή ο διαμερισμός ενός σχήματος σε υποσχήματα, τα οποία συνδυάζονται με διάφορους τρόπους ώστε να προκύπτει ένα νέο σχήμα που θα βοηθά στην επίλυση του προβλήματος.
δ) Η δυσκολία σχετίζεται με την χάραξη βοηθητικών ευθειών, οι οποίες βοηθούν στην επίλυση του προβλήματος δηλαδή σχετίζεται με την λειτουργική κατανόηση ενός γεωμετρικού σχήματος.
ε) Δυσκολία επίλυσης τριγώνων με τη χρήση τριγωνομετρικών αριθμών ή τη χρήση θεωρημάτων γεωμετρίας.

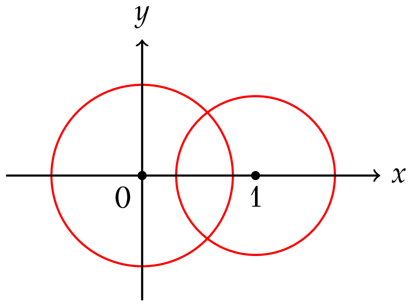
Ερώτηση 9. Δίνεται αριθμός $\rho \in (0,1)$. Να υπολογίσετε την πιθανότητα του ενδεχομένου *«το ρ να είναι ακτίνα δύο κύκλων με κέντρο το $(0,0)$ και το $(1,0)$, αντίστοιχα»*, στις πιο κάτω περιπτώσεις:

9.1 Οι κύκλοι τέμνονται σε δύο διαφορετικά σημεία. **(Μονάδες 7)**

9.2 Οι κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά. **(Μονάδες 3)**

Απάντηση Ερώτησης 9

9.1 Από την γεωμετρική εικόνα του προβλήματος και τον περιορισμό για τις δυνατές τιμές του ρ είναι φανερό ότι οι δύο κύκλοι τέμνονται (σε δύο σημεία η σε ένα σημείο, δηλαδή εφάπτονται εξωτερικά) αν και μόνον αν $\rho \in [\frac{1}{2}, 1)$. Δηλαδή, για να υπολογίσει κανείς την πιθανότητα του ενδεχομένου οι δύο κύκλοι να τέμνονται (σέ ένα η δύο σημεία) είναι το ίδιο με το να υπολογίσει την πιθανότητα ένας αριθμός ρ που ανήκει στο διάστημα $(0,1)$ να ανήκει στο διάστημα $[\frac{1}{2}, 1)$.



Η πιθανότητα αυτή είναι $\frac{1}{2}$, γιατί τα διαστήματα $(0, \frac{1}{2})$ και $[\frac{1}{2}, 1)$ έχουν το ίδιο μήκος. Τό ίδιο σκεπτικό μας οδηγεί να ισχυριστούμε ότι η πιθανότητα του ενδεχομένου οι δύο κύκλοι να τέμνονται σε δύο διαφορετικά σημεία είναι ίση με το $\frac{1}{2}$.

9.2 Παρατηρώ ότι οι δύο κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά αν και μόνο αν $\rho = \frac{1}{2}$. Δηλαδή, για να υπολογίσω την πιθανότητα του ενδεχομένου οι κύκλοι να εφάπτονται εξωτερικά αρκεί να αφαιρέσω από την πιθανότητα του ενδεχομένου οι δύο κύκλοι να τέμνονται την πιθανότητα του ενδεχομένου οι δύο κύκλοι να τέμνονται σε δύο ακριβώς σημεία: $\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$. Άρα, η ζητούμενη πιθανότητα είναι ίση με το 0.

ή

Το ενδεχόμενο οι κύκλοι να εφάπτονται εξωτερικά συμβαίνει όταν το ρ παίρνει την τιμή $\frac{1}{2}$ δηλαδή όταν το ρ στο διάστημα $[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, δηλαδή ένα διάστημα μήκους 0. Έτσι η ζητούμενη πιθανότητα είναι ίση με 0.

Ερώτηση 10. Έστω συνάρτηση $f : [a, \beta] \to \mathbb{R}$, συνεχής στο $[a, \beta]$ και παραγωγίσιμη στο (a, β). Με υπόθεση ότι $f(a) = f(\beta)$ και ότι η συνάρτηση f' είναι γνησίως αύξουσα στο (a, β), να δείξετε ότι $f(x) \leq f(a)$, για κάθε $x \in [a, \beta]$. **(Μονάδες 10)**

Απάντηση Ερώτησης 10

Α΄ τρόπος: Έστω ότι υπάρχει $x \in (a, \beta) : f(x) > f(a) = f(\beta)$. Άρα, από την συνέχεια της f, υπάρχει $x_0 \in (a, \beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = max_{x \in [a,\beta]} f(x) > f(a)$.
Παρατηρώ ότι $f'(x_o) = 0$. Εφαρμόζω τώρα το Θεώρημα Μ.Τ. στό διάστημα $[a, x_0]$. Υπάρχει λοιπόν $x_1 \in (a, x_0)$ τέτοιο ώστε

$$f'(x_1) = \frac{f(x_0) - f(a)}{x_0 - a} > 0$$

Δηλαδή, $f'(x_1) > f'(x_0) = 0$ και $a < x_1 < x_0$. *΄Ατοπο*, γιατί η f' είναι γνησίως αύξουσα.

Β΄ τρόπος: Από το θεώρημα Μέσης Τιμής υπάρχει $\xi \in (a, \beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 0$. Το σημείο $\xi \in (a, \beta)$ είναι μοναδικό επειδή η f' είναι γνησίως αύξουσα. Άρα $f'(x) < 0$, $\forall\ x \in (a, \xi)$ και $f'(x) > 0$, $\forall\ x \in (\xi, \beta)$. Δηλαδή $f(a) \geq f(x)$, $\forall\ x \in [a, \xi]$, γιατί η $f(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό. Όμοια συμπεραίνουμε ότι $f(\beta) \geq f(x)$, $\forall\ x \in (\xi, \beta]$, γιατί η $f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό.